Systems Engineering II

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 9

Théorie de la queue ou de la file d'attente

(queuing ot waiting-line theory)

COURS 11 **Mardi 26.01.2010**

1. Introduction

Une usine ou groupe d’usines est maintenu pour satisfaire les demandes pour service crée par une population d’individus ou d’unités.

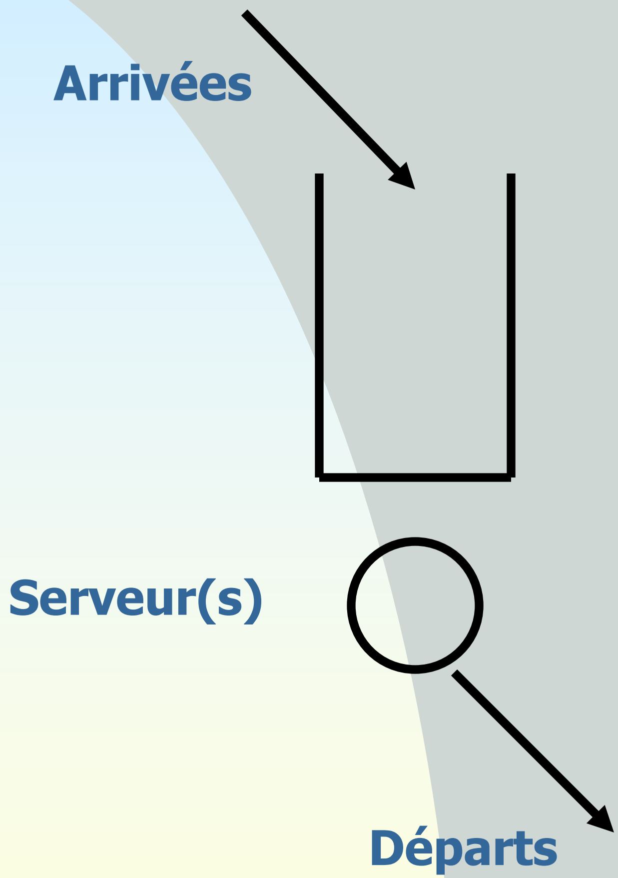
Ces individus forment une queue ou bien une ligne d’attente et reçoivent le service .

Dans la plupart des cas les unités servies rejoignent la population et devient encore candidats pour le service. En d’autres termes, les individus forment une ligne d’attente à l’étape suivante dans le système.

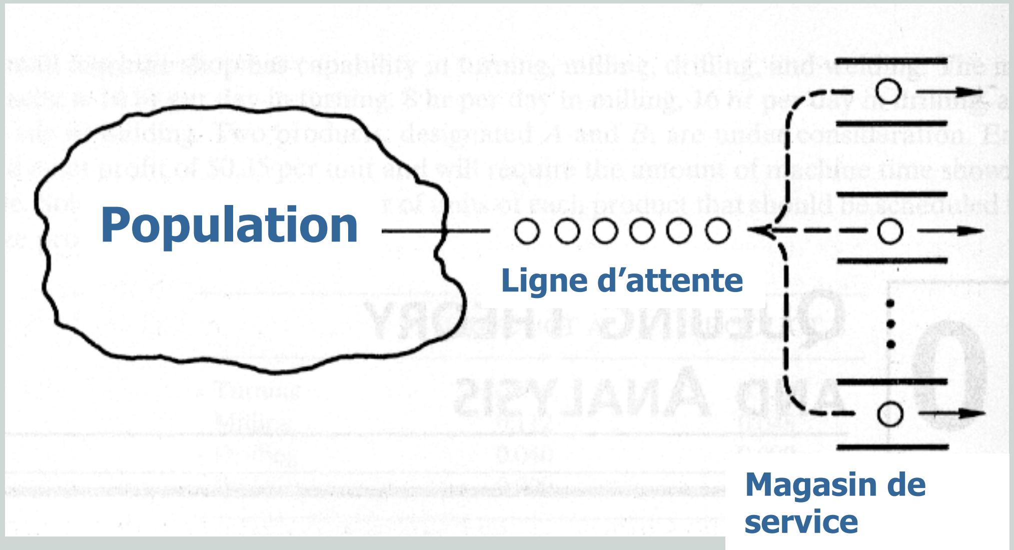
Plusieurs cas dans les phases du système. En production, le flux des articles dans le procès produit une ligne d’attente dans chaque centre de machines. En maintenance, l’équipement à réparer attend pour le service dans le magasin de maintenance. En transport, les lignes d’attente se forment en face du feu de circulation, dépôts…

Dans chaque cas, l’objectif est d’optimiser à partir de certaines variables de décisions en face des paramètres du système.

2. Système de queue (Queuing system)



Système de queue à une voie



Système de queue à plusieurs voies

Système de queue (Suite)

- Pour satisfaire la demande sur le système, le décideur doit établir le niveau de la capacité de servir à fournir.
- Ça veut dire, il faut modifier le taux de service au niveau des voies existantes ou bien ajouter ou éliminer certaines voies.
- Les différentes composantes du système de la ligne d'attente et leur importance dans le procès d'évaluation de la décision sont comme suit:

2.1 Le mécanisme d'arrivée.

La demande de service est la justification de l'existence du système de la ligne d'attente. Il existe pour satisfaire la demande créée par une population, des matériaux, équipement ou véhicules.

Les caractéristiques de la configuration d'arrivée dépend de la nature de la population demandant le service.

Exemple, des avions qui suivent une programmation bien définie pour atterrir sur un aérodrome…des abonnées de téléphone utilisant le téléphone dans un ordre bien défini…

Système de queue (Suite) (mécanisme d'arrivée)

- **La population d'arrivée, bien que sa taille est un nbr fini, peut être considérée sous certaines conditions comme infinie.**
- **Si le taux de départ est relativement petit devant la taille de la population, le nombre d'unités qui peut exiger un service ne pourra pas être diminué. Dans ces conditions la population est considérée de taille infinie.**

2.2 La ligne d'attente.

Dans chaque système de queue, le mécanisme de départ gouverne le taux avec lequel des individus quittent la population et joignent la ligne d'attente.

La formation de la queue est un procès discret. Le nbr d'unités dans la ligne d'attente en chaque point est un nombre entier.

Individus devenant membre de la ligne d'attente prennent une position dans la queue en respectant certaine discipline (premier arrivée, premier servi).

Système de queue (Suite) (Ligne d'attente)

D'autres disciplines: procès de sélection aléatoire, règles d'urgence, premier arrivée dernier servi ou bien une combinaison de ceux-ci.

Des individus restent en ligne pour une période puis rejoignent la population (sans être servie). On dit qu'ils renoncent.

Lorsque un individu est en ligne d'attente ou bien il est servi, il ya un cout d'attente.

Le cout d'attente par unité (individu) par période dépend des unités (individus) en question.

Si un équipement très cher attend d'être maintenu, la perte du profit sera très importante…

En augmentant le niveau de la capacité de service, ça diminuera la longueur de la ligne d'attente et le temps pour chaque service. D'où la ligne d'attente va diminuer.

Système de queue (Suite

2.3 Le mécanisme de service.

Le taux de service rendu à des individus (unités) est une variable directement sous le control du décideur. Cette variable peut avoir une valeur spécifique pour créer un système de ligne d'attente à cout minimal.

Le service est un procès de fournir des activités à des demandeurs.

Chaque fois qu'un demandeur est servi, le nbr dans la ligne d'attente diminue.

Le mécanisme de service est discret (valeur entière).

Le mécanisme de service comprend une seule voie (canal) ou plusieurs voies. Le taux de service dépend de la capacité de service aux différentes voies et du nbr de voies.

Système de queue (Suite) Mécanisme de service

Le service peut être assuré par un être humain seulement, un être humain aidé par un équipement ou des outils ou bien par des équipements seulement.

Chaque canal (voie) du service représente un capital (investissement) plus des couts de fonctionnement et de maintenance.

En plus, il ya les salaires des personnes.

La capabilité du canal rendant le service est fonction des ressources dépensées dans le canal (du personnel et des équipements).

Parce qu'en augmentant la capacité du service on va réduire la ligne d'attente, il faut ajuster la capacité du service de façon à ce que la somme des couts d'attente et des couts de service soit minimale.

On utilise donc le modèle suivant pour atteindre cet objectif.

Système de queue (Suite

2.4 L'évaluation du système de queue.

- **Si le système de queue existe, il peut être évalué en utilisant l'équation suivante:**

$$E= f(X,Y)$$

Où

E: mesure de l'évaluation

X: la variable concernant le niveau de la capacité de service à fournir

Y: paramètres du système du taux d'arrivée, le taux de service, le cout d'attente et le cout des moyens de service.

Système de queue (Suite) évaluation du système de queue

- Si le système est à concevoir, il peut être évalué en utilisant l'équation suivante:

$$E = f(X, Y_d, Y_i)$$

Où

E: mesure de l'évaluation

X: variable de design concernant le niveau de la capacité de service à spécifier

Y_d: paramètres dépendants du design (généralement la fiabilité et/ou la maintenabilité des unités (individus) demandant le service.

Y_i: Paramètres indépendants du design du cout d'attente et cout de moyens de service.

3. Modèles de queue à 01 voie

On suppose que la population des unités est infinie avec le nbr d'arrivée par période une variable aléatoire suivant la loi de Poisson et le temps pour satisfaire la demande (temps de service) une variable aléatoire suivant la loi exponentielle.

Les événements se produisent au temps d'arrivée d'une unité ou bien au temps d'achèvement de service.

Sous ses hypothèses, la probabilité d'occurrence de l'événement (arrivée ou achèvement de service) pendant un intervalle spécifié ne dépend pas du temps d'occurrence de l'événement suivant.

Le nbr attendu des arrivées par période peut être exprimé par

« $1/A_m$ », défini par « λ »

Et le nbr attendu d'achèvement de service par période est exprimé par:

« $1/S_m$ » défini par « μ »

Modèles de queue à 01 voie (suite)

3.1 Probabilité de « n » unités dans le système

La probabilité qu'une arrivée se produit entre le temps « t » et « t+Δt » est « λ. Δt ».

La probabilité qu'un achèvement de service se produit entre « t » et « t+Δt » est « μ. Δt ».

Soit:

n: nbr d'unités dans le système au temps « t », y compris l'unité déjà servie (sinon plus).

$P_n(t)$: probabilité de « n » unités dans le système au temps « t ».

Δt est petit: on néglige la probabilité de plus d'une arrivée ou d'un achèvement de service dans l'intervalle.

Considérons l'évènement qu'il ya « n » unités dans le système au temps «t+Δt », avec n>= 1, exprimé comme suit:

Evènement {n unités dans le système au temps «t+Δt »}

= Evènement {n unités dans le système au temps « t », pas d'arrivée pendant l'intervalle « Δt » et pas d'achèvement de service pendant l'intervalle «Δt »}, ou bien

= Evènement{n+1 unités dans le système au temps « t », pas d'arrivée pendant l'intervalle « Δt » et 01 achèvement de service pendant l'intervalle «Δt »}, ou bien

= Evènement{n-1 unités dans le système au temps « t », 01 arrivée pendant l'intervalle « Δt » et pas d' achèvement de service pendant l'intervalle «Δt »}.

La probabilité de l'évènement de n unités dans le système au temps «t+Δt » est la somme des probabilités des 03 évènements mutuellement exclusifs:

$$P_n(t+\Delta t) = \{P_n(t)[1-\lambda\Delta t][1-\mu\Delta t]\} + \{P_{n+1}(t)[1-\lambda\Delta t].\mu\Delta t\} + \{P_{n-1}(t).\lambda\Delta t[1-\mu\Delta t]\}$$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - (\lambda+\mu)P_n(t)\Delta t + \lambda.\mu.P_n(t)(\Delta t)^2 + \mu.P_{n+1}(t)\Delta t \\ - \lambda.\mu.P_{n+1}(t)(\Delta t)^2 + \lambda.P_{n-1}(t)\Delta t - \lambda.\mu.P_{n-1}(t)(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad \textbf{(9.1)}$$

«Δt » est petite, on néglige $(\Delta t)^2$. Soustrayant $P_n(t)$ des 02 cotés et divisons par «Δt », on aura:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu.P_{n+1}(t) + \lambda.P_{n-1}(t) \quad \textbf{(9.2)}$$

Et la limite sera:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}P_n(t) = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu.P_{n+1}(t) + \lambda.P_{n-1}(t) \quad \textbf{(9.3)}$$

Modèles de queue à 01 voie (suite) Probabilité de « n » unités dans le système

Cas particulier où « n=0 ».

Evènement {0 unités dans le système au temps «t+Δt »}

= Evènement {0 unités dans le système au temps « t », pas d'arrivée pendant l'intervalle « Δt »}, ou bien

= Evènement{ 1 unité dans le système au temps « t », pas d'arrivée pendant l'intervalle « Δt » et 01 achèvement de service pendant l'intervalle «Δt »}.

Par sommation, on aura la probabilité de zéro unités dans le système au temps «t+Δt »,

$$\begin{aligned} P_0\left(t+\Delta t\right) &= \left\{P_0(t)\left[1-\lambda\Delta t\right]\right\} + \left\{P_1(t)\left[1-\lambda\Delta t\right].\mu\Delta t\right\} \\ &= P_0(t) - \lambda.P_0(t)\Delta t + \mu.P_1(t)\Delta t - \lambda.\mu.P_1(t)\left(\Delta t\right)^2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

En négligeant et en réarrangeant, on aura:

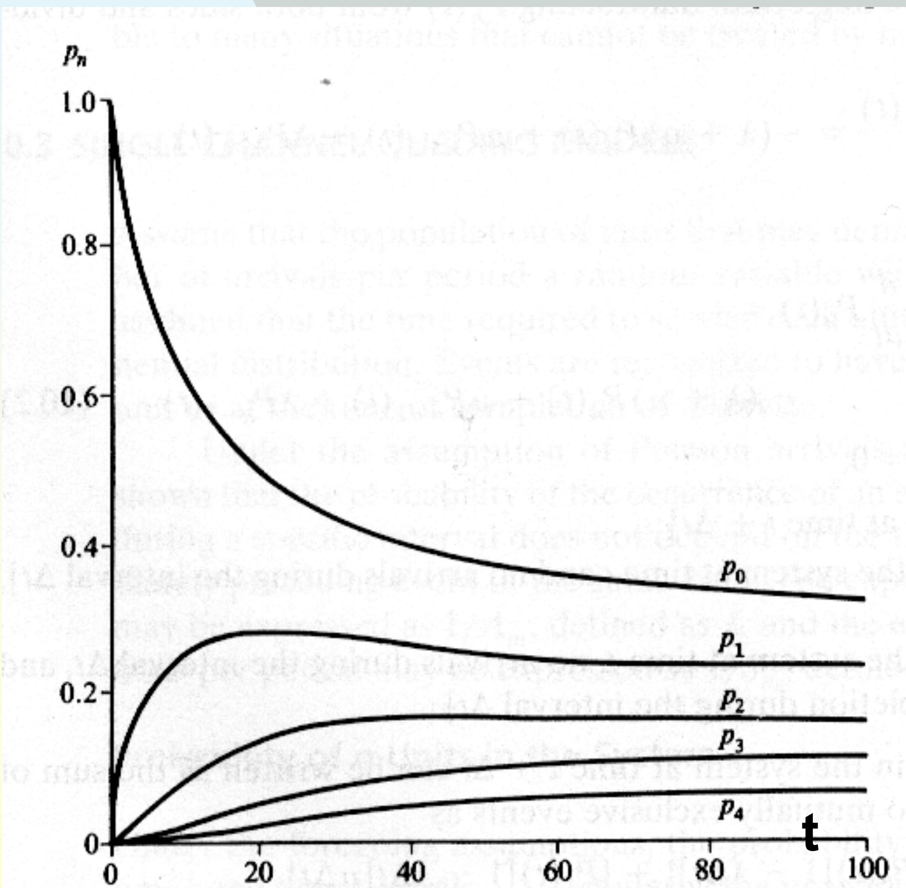
$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda.P_0(t) + \mu.P_1(t) \tag{9.5}$$

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda.P_0(t) + \mu.P_1(t) \tag{9.6}$$

Modèles de queue à 01 voie (suite) Probabilité de « n » unités dans le système

Les équations de limites (9.3) et (9.6) sont appelées équations gouvernant la queue à 01 seule voie avec une arrivée en Poisson et un service en exponentielle. (Solution difficile à obtenir). Pour un système infini

Un exemple de la nature de solutions pour un cas particulier est donné en figure.



Lorsque $P_n(t)$, change avec le temps , la queue est considérée en régime transitoire.

Le changement de Pn(t) devient de plus en plus petit lorsque « t » augmente jusqu'à une certaine valeur permanente. Dans ce cas (permanent) le taux de $dP_n(t)/dt$ est nul et les probabilités sont indépendantes du temps.

Modèles de queue à 01 voie (suite) Probabilité de « n » unités dans le système

L'équation en régime permanent sera:

$$(\lambda + \mu).P_n = \mu.P_{n+1} + \lambda.P_{n-1} \qquad (9.7)$$

et

$$\lambda.P_0 = \mu.P_1 \qquad (9.8)$$

Ces équations forment un système infini d'équations algébriques qui peuvent être résolues en posant $P_{n+1} = P_n.\rho$.

Soit:

$$(\lambda + \mu).\rho.P_{n-1} = (\rho^2.\mu + \lambda).P_{n-1}$$

Ou bien

$$(\lambda + \mu).\rho = \rho^2.\mu + \lambda$$

Où:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Modèles de queue à 01 voie (suite) Probabilité de « n » unités dans le système

Ainsi

$$P_1 = \rho.P_0 \qquad \text{et} \qquad P_n = \rho.P_{n-1} = \rho^n.P_0 \tag{9.7}$$

Or, puisque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{9.8}$$

On aura:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n.P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \tag{9.9}$$

D'où

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{et} \quad P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \tag{9.10}$$

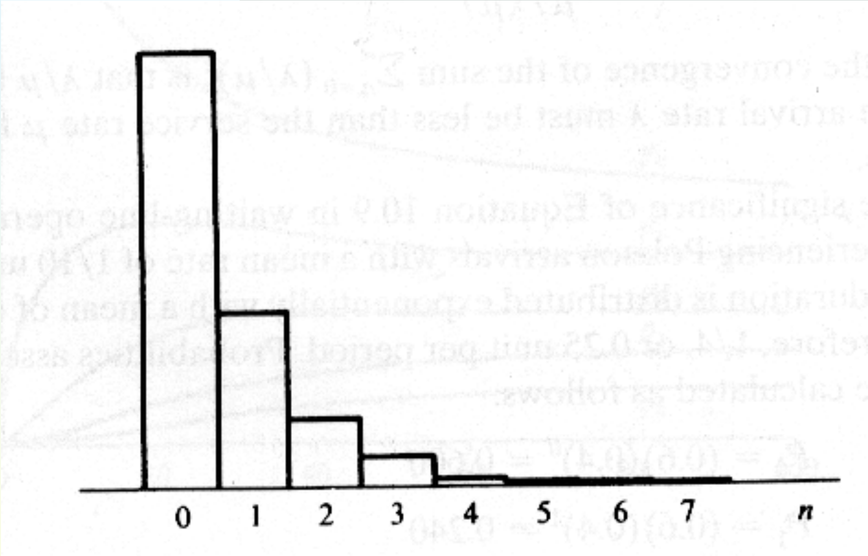
Pour que la somme $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ **Il faut que** $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

i.e. le taux d'arrivée « λ » doit être inférieur au taux de service « μ » pour que la queue atteint le régime permanent.

Exemple.

Supposons que les arrivées sont en Poisson avec un taux moyen de 1/10 unité par période et un service en exponentielle avec une moyenne de 04 périodes.

Le taux de service est de ¼, ou bien 0.25 unité par période.



On aura alors:

$P0=(0.6)(0.4)^0=0.600$

$P1=(0.6)(0.4)^1=0.240$

$P2=(0.6)(0.4)^2=0.096$

$P3=(0.6)(0.4)^3=0.039$

$P4=(0.6)(0.4)^4=0.015$

$P5=(0.6)(0.4)^5=0.006$

$P6=(0.6)(0.4)^6=0.003$

$P7=(0.6)(0.4)^7=0.001$

D'où, par ex:

Probabilité d'avoir plus de 04 unités dans le système, sera: (0.006+0.003+0.001=0.010) etc…

Modèles de queue à 01 voie (suite)

3.2 Nombre moyen d'unités dans un système

Il est exprimé par:

$$n_m = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho).\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n$$

En posant; $g = \sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n$ **On aura:** $\rho.g = \sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1).\rho^n$

En soustrayant « ρ.g » de « g », on aura:

$$(1-\rho).g = \sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1).\rho^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} n.\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho.\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

finalement

$$n_m = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad \textbf{(9.11)}$$

Pour l'exemple d'avant: n_m= 0.1/(0.25-0.10) = 0.667

Modèles de queue à 01 voie (suite)

3.3 Longueur moyenne de la queue (m_m)

Peut être exprimée comme le nbr moyen des unités dans le système moins le nbr moyen des unités servies.

$$m_m = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (9.12)$$

Pour l'exemple d'avant:

$m_m = (0.1)^2 / 0.25(0.25-0.10) = 0.267$

La longueur moyenne d'une ligne d'attente non vide.

La probabilité que la queue est non vide sera:

$$p(m>0) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - (1-\rho) - (1-\rho)\rho = \rho^2$$

Et la longueur moyenne d'une queue non vide sera:

$$(m|m>0)_m = \frac{m_m}{P(m>0)} = \frac{\lambda^2/\mu(\mu-\lambda)}{\rho^2} = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \qquad (9.13)$$

Pour notre exemple: $P(m>0) = (0.10)^2/(0.25)^2 = 0.16$

et longueur moyenne d'une queue non vide $0.25/(0.25-0.10) = 1.667$

Modèles de queue à 01 voie (suite)

3.4 Distribution du temps d'attente

Dans un système de queue probabiliste, le temps d'attente mis par l'unité avant d'aller au service est une variable aléatoire qui dépend du statu du système au temps d'arrivée et des temps exigés pour servir les unités attendant pour le service.

Dans le cas 01 voie, une unité arrivante peut aller directement au service seulement s'il n'ya pas d'autres unités dans le système. Sinon, elle doit attendre.

02 évènements différents peuvent être identifiés sous les hypothèses d'arrivée en Poisson et de service en exponentielle, pour le temps d'attente (w):

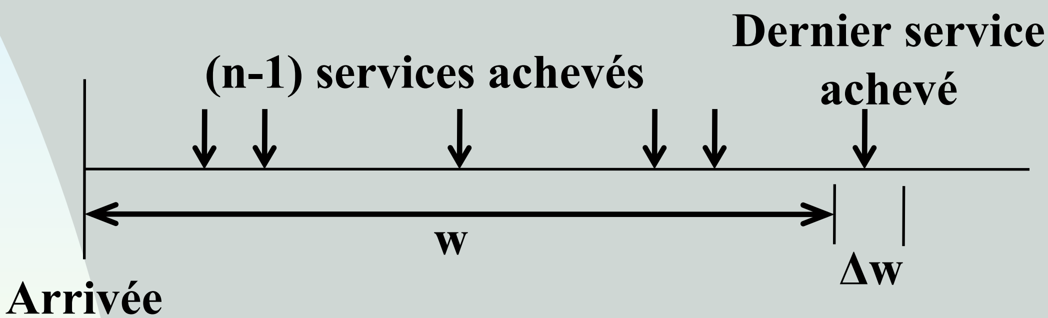
1. **Evènement {w=0} identique à l'évènement {0 unités dans le système}.**
2. **Evènement {temps d'attente est dans l'intervalle w et w+ Δw} est un évènement composé de « n » unités sont dans le système au temps d'arrivée, « n-1 » services achevés pendant le temps «w » et le dernier service achevé dans l'intervalle w et w+ Δw.**

Modèles de queue à 01 voie (suite) Distribution du temps d'attente

La probabilité du 1er évènement sera:

$$p(w=0)=P_0=1-\frac{\lambda}{\mu} \qquad (9.14)$$

Le 2ème évènement est représenté comme suit:



Il ya un évènement pour chaque « n ». (9.15)

$$p(w \le \text{temps d'attente} \le w+\Delta w)=f(w)\Delta w$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_n.P\left[(n-1)\,\text{services en temps } w\right]\right\}.P(01\,\text{service achevé en }\Delta w)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left[\frac{(\mu w)^{n-1}e^{-\mu w}}{(n-1)!}\right].\mu\Delta w=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left[\frac{(\mu w)^{n-1}}{(n-1)!}\right].e^{-\mu w}.\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).\mu\Delta w$$

Modèles de queue à 01 voie (suite) Distribution du temps d'attente

En posant k=n-1, alors:

$$f(w)\Delta w = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{\mu^k w^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-\mu w}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).\mu.\Delta w \qquad (9.16)$$

Or:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{\mu^k w^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda.w}{k!}\right)^k = e^{\lambda w} \qquad (9.17)$$

En remplaçant dans (9.14), on aura:

$$f(w)\Delta w = e^{\lambda w}\left(\frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu w}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).\mu.\Delta w = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).e^{-(\mu-\lambda)w}.\Delta w$$

Soit:

$$f(w) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).e^{-(\mu-\lambda)w} \qquad (9.18)$$

Les équations (9.14) et (9.18) décrivent la distribution du temps d'attente pour une queue à 01 seule voie avec les arrivées en Poisson et les services en exponentielle. La distribution est partie discrète et partie continue.

Modèles de queue à 01 voie (suite) Distribution du temps d'attente

Le temps moyen, un arrivé dépense en attendant d'être servi peut être obtenu de la distribution du temps d'attente:

$$w_m = 0.P(w=0) + \int_{w>0} w.\lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-(\mu-\lambda)w}dw$$

Après plusieurs étapes

$$w_m = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (9.19)$$

Pour l'exemple numérique; w_m= 0.10/0.25(0.25-0.10) = 2.667 périodes

Le temps moyen qu'une unité dépense dans le système de la ligne d'attente est composé du temps d'attente moyen et du temps moyen exigé pour le service.

$$t_m = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (9.20)$$

Pour l'exemple numérique; t_m= 1/(0.25-0.10) = 6.667 périodes

Modèles de queue à 01 voie (suite)

3.5 Taux de service à cout minimal

Le cout du système total attendu par période est la somme du cout d'attente par période (WC) et le cout des moyens utilisés (FC) par période:

$$TC_m = WC_m + FC_m$$

Avec:

$$WC_m = C_w(\lambda)\frac{1}{(\mu-\lambda)} = C_w.n_m = \frac{C_w.\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (9.21)$$

C_w: cout d'attente par période

et

$$FC_m = C_f(\mu) \qquad (9.22)$$

C_f: cout de service d'01 unité

D'où

$$TC_m = \frac{C_w.\lambda}{\mu-\lambda} + C_f.\mu \qquad (9.23)$$

En dérivant % à « μ », on obtient le taux de service à cout minimal

$$\frac{dTC_m}{d\mu} = -C_w\lambda(\mu-\lambda)^{-2} + C_f = 0 \quad \text{d'où} \quad \mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda.C_w}{C_f}} \qquad (9.24)$$

Modèles de queue à 01 voie (suite) Taux de service à cout minimal

Exemple:

Arrivée en Poisson et Service en Exponentielle.

Temps moyen entre arrivées est de 08 périodes.

Le cout d'attente est de $0.1 par unité par période.

Cout des moyens utilisés pour servir 01 unité est de $0.165

Tous les couts sont fonctions de « μ » (voir tableau)

A_m=8, d'où λ=1/8= 0.125

La valeur minimale du taux de cout de service sera:

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda . C_w}{C_f}} = 0.125 + \sqrt{\frac{(0.125).(0.10)}{0.165}}$$

μ=0.4 unités par période

μ	WC_m	FC_m	TC_m
0.125	$ ∞	$0.0206	$ ∞
0.150	0.5000	0.0248	0.5248
0.200	0.1667	0.0330	0.1997
0.250	0.1000	0.0413	0.1413
0.300	0.0714	0.0495	0.1209
0.400	0.0455	0.0660	0.1115
0.500	0.0333	0.0825	0.1158
0.600	0.0263	0.0990	0.1253
0.800	0.0185	0.1320	0.1505
1.000	0.0143	0.1650	0.1793

4. Modèles de queue à plusieurs voies

Dans ce cas, on a « c » voies (canaux) de service, chacune a la possibilité de servir 01 unité à la fois.

Une unité, en arrivant, prend la 1ère voie disponible qui est libre.

Si toutes les voies sont occupées, les arrivées forment une queue unique.

Dans ce cas, la probabilité en état stationnaire est définie par:

$P_{m,n}(t)$ = probabilité qu'il ya « n » unités en attente dans la queue et « m » voies sont occupées au temps « t ».

Avec $0 \leq m \leq c$ et $n=0$ sauf si $m=c$

Modèles de queue à plusieurs voies (suite)

Pour une distribution Poisson des arrivées et exponentielle du service, on a:

$$P_{c,n} = P_{0,0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!}.\rho^n$$

$$P_{m,0} = P_{0,0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}$$

avec $\rho = \frac{\lambda}{c.\mu}$

$$P_{0,0} = \frac{1}{(\lambda/\mu)^c(1/c!)[1/(1-\rho)] + \sum_{r=0}^{r=c-1}(\lambda/\mu)^r(1/r!)} \qquad \textbf{(9.25)}$$

Exemple: système à 03 voies, distribution Poisson des arrivées à un taux moyen de 0.5 unités par période et exponentielle pour le service à chaque voie avec un taux de service moyen de 0.25 unités par période. D'où

$$P_{0,0} = \frac{1}{(0.5/0.25)^3(1/3!)[1/(1-2/3)] + \sum_{r=0}^{r=2}(0.5/0.25)^r(1/r!)} = 1/9$$

Modèles de queue à plusieurs voies (suite)

4.1 Longueur moyenne de la queue

Obtenue par

$$m_m = P_{0,0}\frac{(\lambda/\mu)^{c+1}}{(c-1)!(c-\lambda/\mu)^2} \qquad (9.26)$$

Pour notre exemple

$$m_m = \frac{1}{9}\frac{(0.5/0.25)^4}{(2)!(3-0.5/0.25)^2} = 8/9 = 0.89\,\text{unités}$$

4.2 Nombre moyen d'unités dans le système

Obtenue par

$$n_m = m_m + \frac{\lambda}{\mu} \qquad (9.27)$$

Pour notre exemple

$$n_m = 0.89 + \frac{0.5}{0.25} = 2.89\,\text{unités}$$

Modèles de queue à plusieurs voies (suite)

4.3 Temps d'attente moyen

Obtenu par

$$w_m = \frac{m_m}{\lambda} \qquad (9.28)$$

Pour notre exemple

$$w_m = 0.89 / 0.50 = 1.78 \text{ périodes}$$

4.4 Retard moyen ou temps de maintien

Obtenu par

Temps d'attente + temps de service

$$d_m = w_m + \frac{1}{\mu} \qquad (9.29)$$

Pour notre exemple

$$d_m = 1.78 + 4 = 5.78 \text{ périodes}$$

Modèles de queue à plusieurs voies (suite)

4.5 Probabilité pour qu'une unité arrivante doit attendre

La probabilité de retard est la même probabilité que toutes les voies sont occupées.

$$\Pr(w > 0) = \sum_{0}^{\infty} P_{c,n} = P_{0,0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c} \frac{1}{c!(1-\rho)} \qquad \textbf{(9.30)}$$

Pour notre exemple

$$\Pr(w > 0) = \frac{1}{9}\left(\frac{0.50}{0.25}\right)^{3} \frac{1}{3!(1-2/3)} = 0.444$$

5. La queue avec une distribution non exponentielle du service

5.1 Arrivées en poisson avec des temps de service constants.

Quand le service est assuré par des moyens mécaniques (vitesse mécanique) la durée du service est généralement constante.

Dans ce cas, la variance de la distribution du temps de service est nulle.

Le nombre moyen des unités dans le système est donné par:

$$n_m = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{\lambda}{\mu} \qquad \textbf{(9.31)}$$

Et le temps d'attente moyen sera:

$$w_m = \frac{(\lambda/\mu)}{2.\mu[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{1}{\mu} \qquad \textbf{(9.32)}$$

La queue avec une distribution non exponentielle du service (suite)

Arrivées en poisson avec des temps de service constants.

Le cout du système total attendu par période est la somme du cout d'attente par période (WC) et le cout des moyens utilisés (FC) par période:

$$TC_m = WC_m + FC_m$$

Avec:

$$WC_m = C_w . n_m = C_w \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^2}{2[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{\lambda}{\mu} \right\} \quad \textbf{(9.33)}$$

C_w: cout d'attente par période

$$FC_m = C_f(\mu) \quad \textbf{(9.34)}$$

C_f: cout de service d'01 unité

D'où

$$TC_m = C_w \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^2}{2[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{\lambda}{\mu} \right\} + C_f(\mu) \quad \textbf{(9.35)}$$

La queue avec une distribution non exponentielle du service (suite)

Arrivées en poisson avec des temps de service constants.

Exemple: (le même que précédemment, sauf)

Arrivée en Poisson et Service en constant.

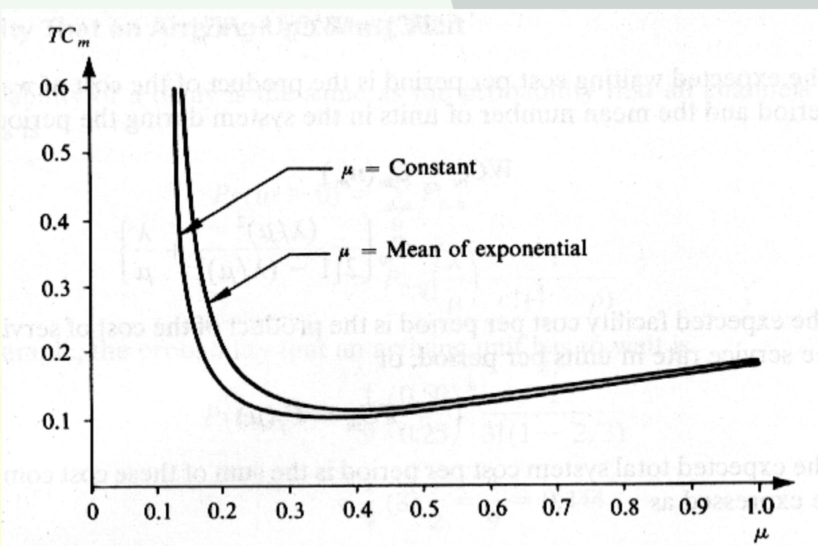
Temps moyen entre arrivées est de 08 périodes.

Le cout d'attente est de $0.1 par unité par période.

Cout des moyens utilisés pour servir 01 unité est de $0.165

Tous les couts sont fonctions de « μ » (voir tableau)

A_m=8, d'où $\lambda = 1/8 = 0.125$



μ	WC_m	FC_m	TC_m
0.1250	$ ∞	$0.0206	$ ∞
0.1500	0.2913	0.0248	0.3161
0.2000	0.1145	0.0330	0.1475
0.2500	0.0750	0.0413	0.1163
0.3000	0.0566	0.0495	0.1061
0.4000	0.0383	0.0660	0.1043
0.5000	0.0292	0.0825	0.1117
0.6000	0.0236	0.0990	0.1226
0.8000	0.0170	0.1320	0.1490
1.0000	0.0134	0.1650	0.1785

μ=0.4 unités par période

La queue avec une distribution non exponentielle du service (suite)

5.2 Arrivées en poisson avec une distribution de temps de service quelconque.

Cas général d'une distribution de temps de service quelconque.

Le nombre moyen des unités dans le système est:

$$n_m = \frac{(\lambda/\mu)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{\lambda}{\mu} \qquad \textbf{(9.36)}$$

Avec « σ^2 » la variance de la distribution du temps de service.

Et le temps d'attente moyen sera:

$$w_m = \frac{(\lambda/\mu^2) + \lambda.\sigma^2}{2.[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{1}{\mu} \qquad \textbf{(9.37)}$$

Si la distribution est exponentielle, il suffit de remplacer «$\sigma^2 = (1/\mu)^2$» et on retrouve les équations déjà données.

La queue avec une distribution non exponentielle du service (suite)

Arrivées en poisson avec une distribution de temps de service quelconque.

Le cout du système total attendu par période est la somme du cout d'attente par période (WC) et le cout des moyens utilisés (FC) par période:

$$TC_m = WC_m + FC_m$$

Avec:

$$TC_m = C_w . n_m + C_f(\mu) = C_w \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2[1-(\lambda/\mu)]} + \frac{\lambda}{\mu} \right\} + C_f(\mu) \qquad \textbf{(9.38)}$$

6. Modèles de queue d'une population finie.

Théorie un peu complexe par rapport à la population infinie.

Modèles à population finie doivent être appliqués aux systèmes de la ligne d'attente où la population est relativement petite par rapport au taux d'arrivée.

Dans ce cas, les unités quittant la population de façon significative affectent les caractéristiques de la population et les probabilités d'arrivée.

On suppose que les 02 distributions de temps entre appels pour service pour une unité et du service seront exponentielles.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

6.1 Théorie de la queue finie.

Les unités quittent la population quand elles échouent. On peut donc calculer le nombre de ces échecs. Soient:

Considérons les définitions suivantes:

N: nbr d'unités dans la population

M: Nbr de voies (canaux) de service dans le magasin de réparation.

λ: Taux de panne d'un article (1/MTBF).

μ: Taux de réparation d'un canal de réparation (1/MTTR).

n: Nombre d'articles échoués.

P_n: Probabilité permanente de « n » articles échoués.

P_0: Probabilité de zéro articles échoués.

$M\mu$: Taux de réparation possible maximal.

λ_n: Taux de panne quand « n » articles échouent.

μ_n: Taux de réparation qd « n » articles échouent.

Modèles de queue d'une population finie. (suite) Théorie de la queue finie.

Si « $\lambda=1/MTBF$ » alors pour « n » articles échoués, on aura:

$\lambda_n = (N-n)\,\lambda$. (N-n: nbr d'articles opérationnels chacun échoue au taux « λ »).

Si « $\mu=1/MTTR$ », alors on a pour « n » articles échoués:

$$\mu_n = \begin{cases} n.\mu & \text{Si } n \in 1,2,\ldots,M-1 \\ M.\mu & \text{Si } n \in M, M+1,\ldots,N \end{cases} \qquad (9.39)$$

Pour déterminer la probabilité de distribution, P_n, pour le nbr d'articles qui échouent, on utilise l'analyse de la naissance-mort. (birth-death analysis).

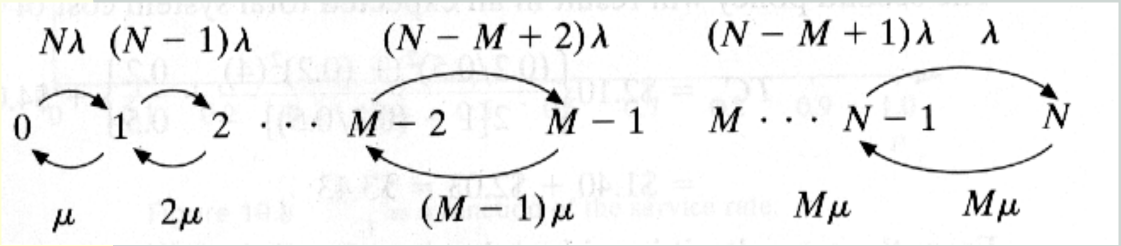
Dans ce cas, l'état du système est le nbr d'articles qui échouent (Etat=0,1,2,…,N).

Les taux de changement entre les états sont les taux de panne, «λ_n», et les taux de réparation «μ_n ».

λ_n :

Etat :

μ_n :



Modèles de queue d'une population finie. (suite) Théorie de la queue finie.

Si on suppose un état permanent (steady-state) on aura:

$$
\begin{aligned}
N\lambda P_0 &= \mu P_1 \\
N\lambda P_0 + 2\mu P_2 &= [\mu + (N-1)\lambda]P_1 \\
(N-1)\lambda P_1 + 3\mu P_3 &= [2\mu + (N-2)\lambda]P_2 \\
&\vdots \\
(N-M+2)\lambda P_{M-2} + M\mu P_M &= [(M-1)\mu + (N-M+1)\lambda]P_{M-1} \\
&\vdots \\
2\lambda P_{N-2} + M\mu P_N &= (M\mu + \lambda)P_{N-1} \\
\lambda P_{N-1} &= M\mu P_N
\end{aligned}
$$

De plus: $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$

En résolvant ces équations, on aura:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{N} C_n\right)^{-1} \qquad \textbf{(9.40)}$$

Avec:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{Si } n = 0, 1, 2, \ldots, M \\[2ex] \dfrac{N!}{(N-n)!\,M!\,M^{n-M}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{Si } n = M+1, M+2, \ldots, N \end{cases} \qquad \textbf{(9.41)}$$

Les éqs (9.40) et (9.41) peuvent être utilisées pour déterminer la probabilité d'un état permanent de « n » articles échoués. $P_n = P_0 \cdot C_n$ $(n=0,1,\ldots,N)$

Modèles de queue d'une population finie. (suite) Théorie de la queue finie.

Exemple:

Population finie de 10 unités avec chaque unité ayant un MTBF=32 heures.

Aussi, on suppose le temps moyen pour servir un article dans un seul canal est de 08 h.

D'où: $\lambda=1/32$ et $\mu=1/8$ et $\lambda/\mu= 0.25$

Ainsi, on peut calculer les C_n. Soit:

$$C_0 = \frac{10!(0.25)^0}{10!0!} = 1 \quad ; \; C_1 = \frac{10!(0.25)^1}{9!1!} = 2.5$$

Les autres C_n, on utilise la 2ème expression. Soit:

$$C_2 = \frac{10!(0.25)^2}{8!1!1^1} = 5.625 \quad ; \; C_3 = \frac{10!(0.25)^3}{7!1!1^2} = 11.25 \,; C_4 = 19.6875 \,; C_5 = 29.53125;$$

$$C_6 = 36.9140625; C_7 = 36.9140625; C_8 = 27.685547; C_9 = 13.842773; C_{10} = 3.460693$$

Modèles de queue d'une population finie. (suite) Théorie de la queue finie.

Exemple:

$$\sum_{n=0}^{10} C_n = 188.410888 \quad \text{d'où} \quad P_0 = \left(\sum_{n=0}^{10} C_n\right)^{-1} = 0.0053076$$

Ainsi les probabilités de panne de « n » articles en état permanent seront: $P_n = P_0 . C_n$

Soit:

P_0=0.0053076 ; P_1=0.013269 ; P_2=0.0298553 ; P_3=0.0597105 ;

P_4=0.1044934 ; P_5=0.15674 ; P_6=0.1959251 ; P_7=0.1959251

P_8=0.1469438 ; P_9=0.0734719 et P_{10}=0.018368

Le nombre moyen d'unités qui échouent sera alors:

$$\sum_{n=0}^{10} n \, x \, P_n = 0x0.0053076 + 1x0.013269 + \ldots + 10x0.018368 = 6.023 \text{ unités}$$

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

6.2 Tables de la queue finie.

Plus pratique, on utilise des fois des tables pour calculer les probabilités d'échec et le nbr d'articles qui échouent.

Considérons les définitions suivantes:

T: Temps de service moyen

U: Temps moyen entre les appels pour service.

H: Nombre moyen d'unités servies.

L: Nombre moyen d'unités attendant d'être servies

J: nombre moyen d'unités productives.

Un exemple de table est donné.

Modèles de queue d'une population finie. (suite) Tables de la queue finie.

Un exemple de table est donné (pour population de 10, 20 et 30 unités).

TABLE E.1 Finite Queuing Factors—Population 10

X	M	D	F	X	M	D	F	X	M	D	F
0.008	1	0.072	0.999		2	0.177	0.990		3	0.182	0.986
0.013	1	0.117	0.998		1	0.660	0.899		2	0.528	0.921
0.016	1	0.144	0.997	0.085	3	0.037	0.999		1	0.954	0.610
0.019	1	0.170	0.996		2	0.196	0.988	0.165	4	0.049	0.997
0.021	1	0.188	0.995		1	0.692	0.883		3	0.195	0.984
0.023	1	0.206	0.994	0.090	3	0.043	0.998		2	0.550	0.914
0.025	1	0.224	0.993		2	0.216	0.986		1	0.961	0.594
0.026	1	0.232	0.992		1	0.722	0.867	0.170	4	0.054	0.997
0.028	1	0.250	0.991	0.095	3	0.049	0.998		3	0.209	0.982
0.030	1	0.268	0.990		2	0.237	0.984		2	0.571	0.906
0.032	2	0.033	0.999		1	0.750	0.850		1	0.966	0.579
	1	0.285	0.988	0.100	3	0.056	0.998	0.180	5	0.013	0.999
0.034	2	0.037	0.999		2	0.258	0.981		4	0.066	0.996
	1	0.302	0.986		1	0.776	0.832		3	0.238	0.978
0.036	2	0.041	0.999	0.105	3	0.064	0.997		2	0.614	0.890
	1	0.320	0.984		2	0.279	0.978		1	0.975	0.549
0.038	2	0.046	0.999		1	0.800	0.814	0.190	5	0.016	0.999
	1	0.337	0.982	0.110	3	0.072	0.997		4	0.078	0.995

Chaque groupe de valeurs est indéxé par N (nbr d'unités dans la population). Dans chaque groupe, les données sont classées par X, le facteur de service et M (nbr de voies de service).

02 valeurs sont données (pour chaque valeur de N, X et M) : (1) D (probabilité de retard: probabilité qu'un arrivée aura à attendre) et (2) F (facteur d'efficacité utilisé dans le calcul de H, L et J)

Modèles de queue d'une population finie. (suite) Tables de la queue finie.

Le facteur de service est comme suit:

$$X = \frac{T}{T+U} \qquad (9.42)$$

Et le nbr moyen d'unités servies sera:

$$H = F.N.X \qquad (9.43)$$

Et le nbr moyen d'unités attendant d'être servies sera:

$$L = N(1-F) \qquad (9.44)$$

Enfin, le nbr moyen d'unités productives sera:

$$J = N.F.(1-X) \qquad (9.45)$$

Exemple précédent, on a: T=8 et U=32. D'où:

X=8/(8+32) = 0.20

Du tableau, pour X=0.20 et M=1, on tire F=0.497 et D=0.987. d'où

H=0.497(10)(0.20) = 0.994 et L=10(1-0.497)=2.03

Ainsi, nbr moyen échoué sera H+L=6.024 (même résultat)

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 1: nbr de voies (canaux) de service sous contrôle.

Supposons une population de 20 unités, avec chaque unité ayant temps moyen entre service exigé de 32 mn. Chaque voie de service a un temps de service moyen de 8 mn. Les 02 distributions sont exponentielles (temps d'arrivée et de service).

Le nbr de voies est sous contrôle managérial. Le cout d'avoir 01 voie avec une capacité de temps de service moyen de 8 mn est de $10 par heure. Le cout d'attente est de $5 par unité par heure.

Le facteur de service sera: $X=T/(T+U) = 8/(8+32) = 0.20$.

Du tableau, on tire les valeurs de F pour les différentes valeurs de M et pour N=20 et X=0.20

En utilisant les différentes équations on peut trouver les résultats du tableau.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 1: nbr de voies (canaux) de service sous contrôle.

M (A)	*F* (B)	*H* (C)	*L* (D)	*H* + *L* (E)	WAITING COST (F)	SERVICE COST (G)	TOTAL COST (H)
8	0.999	4.00	0.02	4.02	$20.10	$80	$100.00
7	0.997	3.99	0.06	4.05	20.25	70	90.25
6	0.988	3.95	0.24	4.19	20.95	60	80.95
5	0.963	3.85	0.74	4.59	22.95	50	72.95
4	0.895	3.58	2.10	5.68	28.40	40	68.40
3	0.736	2.94	5.28	8.22	41.10	30	71.10
2	0.500	2.00	10.00	12.00	60.00	20	80.00

(F) = $5 x (E)   et   (G) = $10 x (A).

Le nbr de voies donnant un cout minimal est de 04.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 1: nbr de voies (canaux) de service sous contrôle.

Si maintenant le cout de $5 par unité par heure est du à une perte de profit, résultant d'unités non productives. On peut obtenir la même solution en maximisant maintenant le profit. On aura donc le tableau suivant:

M (A)	F (B)	J (C)	GROSS PROFIT (D)	SERVICE COST (E)	NET PROFIT (F)
8	0.999	15.98	$79.90	$80	$−0.10
7	0.997	15.95	79.75	70	9.75
6	0.988	15.81	79.05	60	19.05
5	0.963	15.41	77.05	50	27.05
4	0.895	14.32	71.60	40	31.60
3	0.736	11.78	58.90	30	28.90
2	0.500	8.00	40.00	20	20.00

(C) J=N.F(1-X)

(D) = $5 x (C) et (E) = $10 x (A). et (F) = (D) - (E)

Le nbr de voies donnant un profit maximal est de 04.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 2: temps de service moyen sous contrôle.

Supposons une population de 10 unités à être servie par un service à une seule voie. Le temps moyen entre appels est de 30 mn.

Si le taux de service moyen est de 60 unités par heure, le cout du service est de $100 par heure. Le cout de service par heure est inversement proportionnel au temps (en mn) pour servir une unité (i.e. $100/T).

Temps d'appels pour service et durée du service sont exponentiels.

Perte de profits à cause des attentes des unités dans le système est de $15 par heure.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 2: temps de service moyen sous contrôle.

T (A)	X (B)	F (C)	J (D)	GROSS PROFIT (E)	SERVICE COST (F)	NET PROFIT (G)
1	0.032	0.988	9.56	$143.20	$100.00	$43.20
2	0.062	0.945	8.86	132.90	50.00	82.90
3	0.091	0.864	7.85	117.75	33.33	84.42
4	0.118	0.763	6.73	101.00	25.00	76.00
5	0.143	0.674	5.77	86.51	20.00	66.51

(A): capacité de la voie exprimée en temps de service moyen (mn).

(B): X=T/(T+U)   avec U=30 mn.

(C): Facteurs d'efficacité (du tableau pour N=10 et X par interpolation).

(D): Nbr moyen d'unités productives J=N.F(1-X).

(E): Profit par heure = $15 x (D).

(F): Cout de service par heure   = $100 / T colonne (A).

(G): Profit net = (E) - (F)

Résultat: Maximum profit est pour 03 périodes.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 3: facteur de service sous contrôle.

On veut étudier une population d'équipement de production avec comme objectif déterminer la politique de maintenance à cout minimal.

Temps d'appels pour maintenance et durée du service sont exponentiels.

02 paramètres sont sous contrôle: (1) par augmentation de la capabilité de réparation (réduire T), le temps de non fonctionnement de la machine moyen va être réduit et (2) les politiques alternatives de maintenance préventive va influencer le temps moyen entre pannes, U.

Le pb de maintenance de machine revient à déterminer le facteur de service X, qui minimise le cout de l'opération.

Une perte économique due au non fonctionnement des machines peut être réduite en réduisant X.

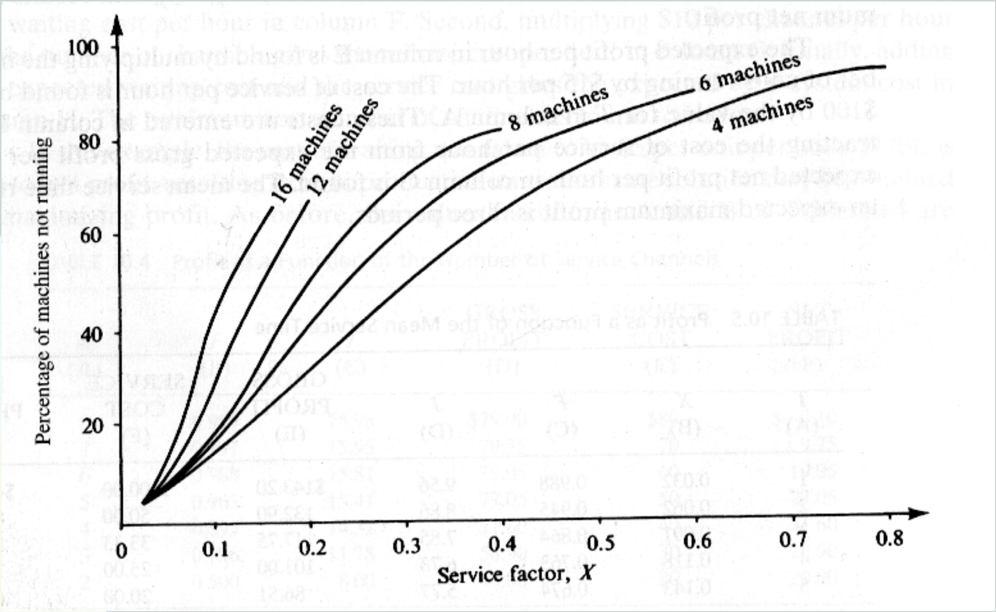
Mais réduire X, nécessite soit une réduction de temps de réparation soit une politique de maintenance préventive plus chère soit les 02 en même temps.

D'où, il faut trouver une balance entre le cout des machines non productives et le cout d'établir le facteur X.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 3: facteur de service sous contrôle.

Pour l'analyse, il vaut mieux développer des courbes donnant les % des machines **non fonctionnant** **en fonction de X.**



La courbe est donnée pour un service à 01 voie.

La courbe est déterminée en utilisant l'éq. du nbr moyen d'unités servies H=F.N.X et les tables.

Plus le facteur augmente et plus le % est important.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 3: facteur de service sous contrôle.

Quel serait alors le facteur de service à cout minimal?

Supposons que les 08 machines sont maintenues par un mécanicien et un assistant. Chaque machine produit un profit de \$22 par heure en fonctionnement. Le mécanicien et son assistant couteront \$28.80 par heure.

03 politiques de maintenance préventive sont considérées.

La 1ère coutera \$80 par heure. Après avoir considéré l'augmentation dans le temps moyen entre pannes et l'effet du temps de service, X est estimée à 0.04

La 2ème coutera \$42 par heure mais donne X=0.10

La 3ème n'implique pas de maintenance préventive , donc ne coutera rien mais donne X=0.20

Temps entre appels et temps de service sont en exponentiels.

Modèles de queue d'une population finie. (suite)

Exemple 3: facteur de service sous contrôle.

En utilisant les graphes précédents, on peut calculer

Maintenance Policy	Service Factor, X	Machines Not Running	Cost of Lost Profit	Cost of Maintenance	Cost of Mechanic	Total Cost
1	0.04	0.5	$11.00	$80	$28.80	$119.80
2	0.10	1.6	35.20	42	28.80	106.00
3	0.20	4.1	90.20	0	28.80	119.00

7. Systèmes de population d'équipements réparables (Repairable Equipment Population Systems: REPS) (Exemple)

Une population finie d'équipement réparable est acheté et maintenu en fonctionnement pour répondre à la demande.

Les unités d'équipement réparables, lorsqu'elles échouent (s'usent) ou deviennent non fonctionnelles, il faut les réparer et retourner en service.

Avec le temps, les unités vieilles sont démontées du système et remplacer par des unités neuves.

Ainsi le pb de design général d'équipement est de déterminer la taille de la population, l'âge de remplacement des unités, le nbr de voies (canaux) de réparation, le temps moyen entre pannes de design et le temps moyen de design pour réparation de façon à ce que le cout de cycle de vie du système sera minimale avec la considération d'autres critères.

Systèmes de population d'équipements réparables

7.1 Introduction à REPS

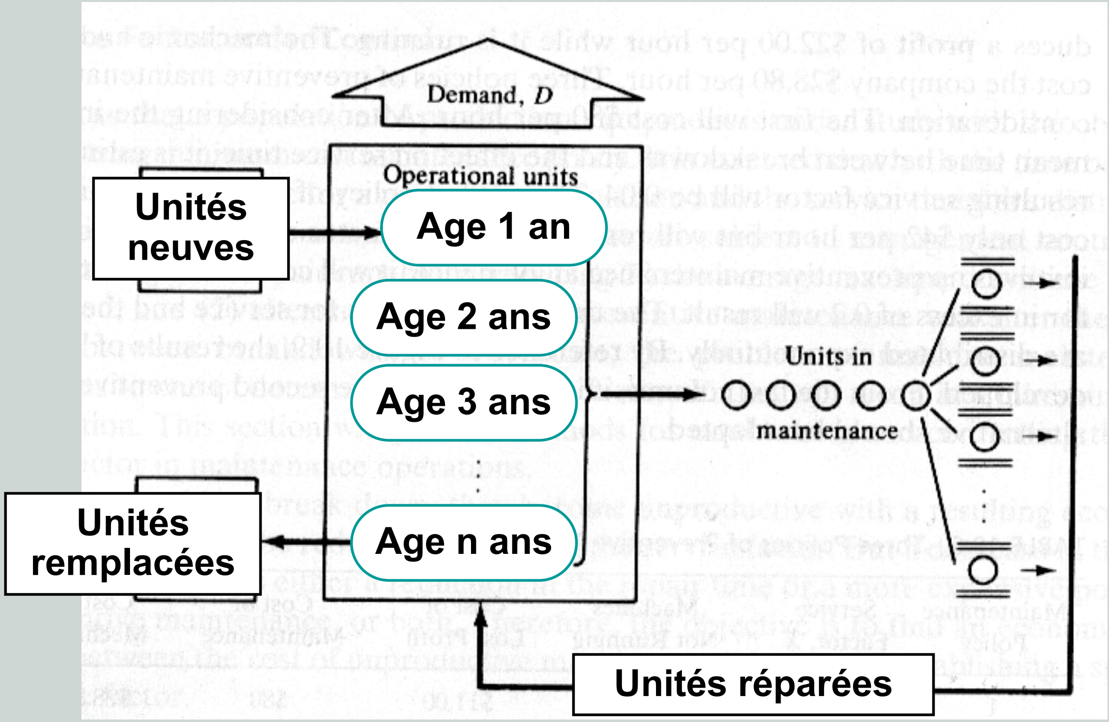
On va considérer 02 pbs de REPS en exemple.

Le 1er pour déterminer la taille de la population, l'âge de remplacement des unités et le nbr de voies de réparation de façon à ce que la somme des couts associés avec le système sera minimale.

Le 2ème est de générer et évaluer des systèmes candidats en spécifiant MTBF, MTTR comme fonction du cout unitaire et aussi de la taille de la population, de l'âge de remplacement des unités et du nbr de voies de réparation.

i) Système opérationnel.

Soit le REPS de la figure



Les unités sont divisées en unités opérationnelle s pour répondre à la demande D et les unités non opérationnelles et non disponibles pour satisfaire la demande. On suppose que les unités ne sont pas jetées après pannes mais réparées et retournées en service.

On suppose que le nbr d'unités neuves acheté chaque année est constant et le nbr d'unités dans chaque groupe d'âge est égal au rapport du nbr total exigé dans la population et le nbr exigé de groupes d'âge.

ii) Portée et hypothèses

On ne considère que l'état permanent dans cet exemple.

Les hypothèses prises dans le développement sont:

1. Les temps d'inter arrivées sont en exponentiels.
2. Temps de réparation sont en exponentiels.
3. Nbr d'unités dans la population est petit de façon à considérer les formulations de queue de population finie.
4. Les temps d'inter arrivées sont statistiquement indépendants des temps de réparation.
5. Les voies de réparation sont parallèles et chacune est capable de performance similaire.
6. La taille de population doit toujours être plus grand ou au moins égale au nbr de voies de service.
7. Chaque voie serve une seule unité à la fois.

ii) Portée et hypothèses

8. MTBF et MTTR varient pour chaque groupe d'âge et représentent la valeur attendue pour l'âge de groupe.

9. Unités réparées sont retournées au fonctionnement avec les mêmes caractéristiques opérationnelles que celles de leur groupe d'âge.

iii) Evaluation du design du système.

Le pb I REPS peut être évalué en utilisant l'éq. $E=f(X,Y)$. Il faut trouver les valeurs optimales pour des variables de design contrôlables en face de paramètres de système non contrôlables.

Le pb II REPS , on utilise l'éq. $E=f(X, Y_d, Y_i)$. Il faut établir les valeurs pour paramètres dépendants du design contrôlables en face de paramètres indépendants du design non contrôlables et les valeurs optimales de variables de design.

iii) Evaluation du design du système.

03 variables de design sont identifiées dans le REPS. Et sont contrôlables: (1) le nbr d'unités à déployer, (2) l'âge de remplacement des unités et (3) et le nbr de canaux de réparation.

Des valeurs optimales sont recherchées pour ces variables de façon à ce que la somme de tous les couts associés au REPS soit minimisée.

En Pb I on s'intéresse à l'optimisation des variables de design comme seuls facteurs contrôlables.

En Pb II, on cherche plutôt le meilleur candidat par comparaison, les valeurs optimales sont secondaires et ne sont utilisées que comme moyens de comparaison de systèmes équivalents. Alors qd le meilleure système est choisie, on les utilise pour déterminer le fonctionnement optimal.

La demande D, un paramètre non contrôlable est supposé constant dans le temps.

iii) Evaluation du design du système.

La demande D, un paramètre non contrôlable est supposé constant dans le temps.

D’autres paramètres non contrôlables sont de nature économique, cout de pénalité du à la pénurie qui apparaissent lorsqu’il ya un nbr insuffisant d’unités opérationnelles pour satisfaire la demande et le cout pour avoir des capabilités de réparation, et la valeur de l’argent dans le capital investi.

Certains paramètres su système sont non contrôlables dans le pb I mais contrôlables dans le pb II. Ex: MTBF et MTTR, l’efficacité de l’énergie des unités d’équipement, la vie de design des unités et le premier cout et la valeur résiduelle des unités.

7.2 Formulation de la fonction d'évaluation

On peut utiliser le modèle d'équivalence annuelle (AE), soit:

$$AELCC = PC + OC + RC + SC. \tag{9.46}$$

AELCC: Annuel Equivalent Life Cycle cost.

PC: Couts de population équivalent de l'année.

OC: Couts de fonctionnement annuels.

RC: Couts des moyens de réparation annuels.

SC: Couts de pénalité due à la pénurie, annuels.

i) Calcul de PC.

Pour une population de « N » unités d'équipement, on a:

$$PC = C_i.N \qquad (9.47)$$

Avec $C_i = P(A/P,i,n) - B(A/F,i,n)$ **(9.48)**

B: book value (valeur originale moins la dépréciation à « t »).

Pour une dépréciation linéaire, on aura:

$$B = P - n.\frac{P - F}{L} \qquad (9.49)$$

P: valeur initiale, F: valeur résiduelle, n: l'age de retraitde l'unité (n>1) et L: la durée vie de design estimée de l'unité.

ii) Calcul de OC.

Pour une population de « N » unités d'équipement, on a:

$$OC = (EC + LC + PMC + autres) . N \qquad (9.50)$$

Avec

EC: Cout annuel de l'énergie consommée

LC: Cout annuel de main d'œuvre

PMC: cout annuel de la maintenance préventive.

Autres: autres couts annuels, stockage, assurance, taxes.

iii) Calcul de RC.

Cout des moyens (usines) de réparation :

$$RC = C_r.M \tag{9.51}$$

Avec

C_r: Cout annuel de réparation variable et fixe par voie (canal).

M: nbr de voies (canaux) de réparation

S'il ya un nbr de composantes de voies de réparation avec différentes vies estimées, C_r est la somme de leurs couts annuels.

Certains couts à considérer; les couts des bâtiments, fournitures de maintenance, équipement de test, … exprimés par voie.

Couts administratifs, de main d'œuvre de maintenance et autres charges sont calculés sur une base annuelle pour chaque voie.

iv) Calcul de SC.

Cout due à la pénurie. Lorsque des unités d'équipement tombant en panne causent un nbr dans l'état opérationnel plus bas que la demande, un cout de pénurie se produira.

$$SC = C_s.[E(S)] \qquad (9.52)$$

C_s: cout de pénurie par pénurie unitaire par an.

E(S): nbr pénurie d'unités attendu. Peut être déterminé à partir de la probabilité de distribution de « n » pénuries d'unités, P_n (éqs. (9.40) et (9.41)).

Soit N-D: nbr d'extra unités dans la population.

Pour n=1,2,3…,N-D, il n'ya pas de pénurie.

n=N-D+1, pénurie d'1 unité, n=N-D+2: pénurie de 02, n=N: pénurie de D.

Alors:

$$E(S) = \sum_{j=1}^{D} j.P_{(N-D+j)} \qquad (9.53)$$

Systèmes de population d'équipements réparables

7.3 Application au Pb I du REPS

Dans ce cas, le décideur n'a pas de control sur les paramètres du système mais peut choisir le nbr d'unités d'équipement à commander et à déployer, l'âge qd on doit remplacer les unités et le nbr de voies dans le magasin de réparation.

Supposons que la demande D est pour 15 unités identiques. Les paramètres du système sont comme suit:

Par contre les variables de design (pb II) seront comme suit:

Population, N	Voies de réparation, M	Age de retrait, n
19	3	4

Tableau 9.2

Parameters For REPS Problem 1

PARAMETER	VALUE	
Unit acquisition cost	$52,000	
Unit design life	6 years	
Unit salvage value at end of design life	$7,000	
Unit operating cost		
Energy and fuel	$500	
Operating labor	450	
Preventive maintenance	400	
Other operating costs	400	
Annual repair channel cost	$45,000	
Annual shortage cost	$73,000	
Annual interest rate	10%	
Age cohorts	MTBF	MTTR
0–1	0.20	0.03
1–2	0.24	0.04
2–3	0.29	0.05
3–4	0.29	0.05
4–5	0.26	0.06
5–6	0.22	0.07

Tableau 9.1

Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb I du REPS

Dans ce cas,

1) $PC= C_i.N$ avec: $C_i=P(A/P,i,n) – B(A/F,i,n)$

$B=P-n((P-F)/L) = 5200 – 4((52000-7000)/6) = \$22000$

$C_i=52000\ (0.1)(1.1)^4/((1.1)^4-1) – 22000(0.1)/((1.1)^4-1)=\$11664$

D'où **PC=11664 x 9 = $221616.**

2) OC= ($500 + $450 + $400 + $400) (19) = $33250

3) RC=$45000 (3) = $135000

4) $SC= C_s[E(S)]$. Il est basé sur le MTBF et MTTR de la table pour les années de 1 à 4.

$$E(S) = \sum_{j=1}^{D} j.P_{(N-D+j)}$$

De ces valeurs, les moyennes de MTBF et MTTR seront:

MTBF=(1/4)(0.2+0.24+0.29+0.29) = 0.255

MTTR=(1/4)(0.03+0.04+0.05+0.05) = 0.0425.

Le taux de panne et le taux de réparation pour 01 voie sont

$\lambda=(1/MTBF) = 1/0.255=3.9215$ et $\mu=1/MTTR=1/0.0425=23.5294$

Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb I du REPS

D'où $\lambda/\mu = 1/6$.

Ensuite il faut calcule C_n pour n=0,1,2,3…,19 de l'équation (avec N=19 et M=3):

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{Si n} = 0, 1, 2, \ldots, M \\ \dfrac{N!}{(N-n)!\,M!\,M^{n-M}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{Si n} = M+1, M+2, \ldots, N \end{cases}$$

$C_0=1$; $C_1=3.1665$; $C_2=4.7496$; $C_3=4.4856$;

$C_4=3.9813$; $C_5=3.3224$; $C_6=2.584$;…; $C_{18}=0.0000$; $C_{19}=0.0000$

D'où:

$$\sum_{n=0}^{19} C_n = 27.939$$

Et

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{19} C_n} = 0.0358$$

Ainsi les probabilités seront: $P_n=C_n.P_0$.

$P_0=0.0358$; $P_1=0.1134$; …; $P_6=0.0925$; …;$P_{18}=0.000$; $P_{19}=0.000$

D'où:

$$E(S) = \sum_{j=1}^{D} j.P_{(N-D+j)} = \sum_{j=1}^{15} j.P_{(4+j)} = 1(0.1189) + 2(0.0925) + \ldots + 15(0.000) = 1.00663$$

Finalement **SC**$=C_s[E(S)]=\$73000 \times 1.00663=$ **\$73484**

Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb I du REPS

Le cout annuel équivalent du système total sera:

TC=PC+OC+RC+SC= $463350

En considérant des points au voisinage pour N, M et n on remarque du tableau que cette valeur est optimale.

Age de retrait, n	Nbr d'unités, N	Nbr de voies de réparation, M		
		2	3	4
3	19	$598395	$465985	$469130
4	18	592920	464770	465755
	19	600720	463350	464295
	20	610775	466610	468755
5	19	643050	480375	467735

Tableau 9.3

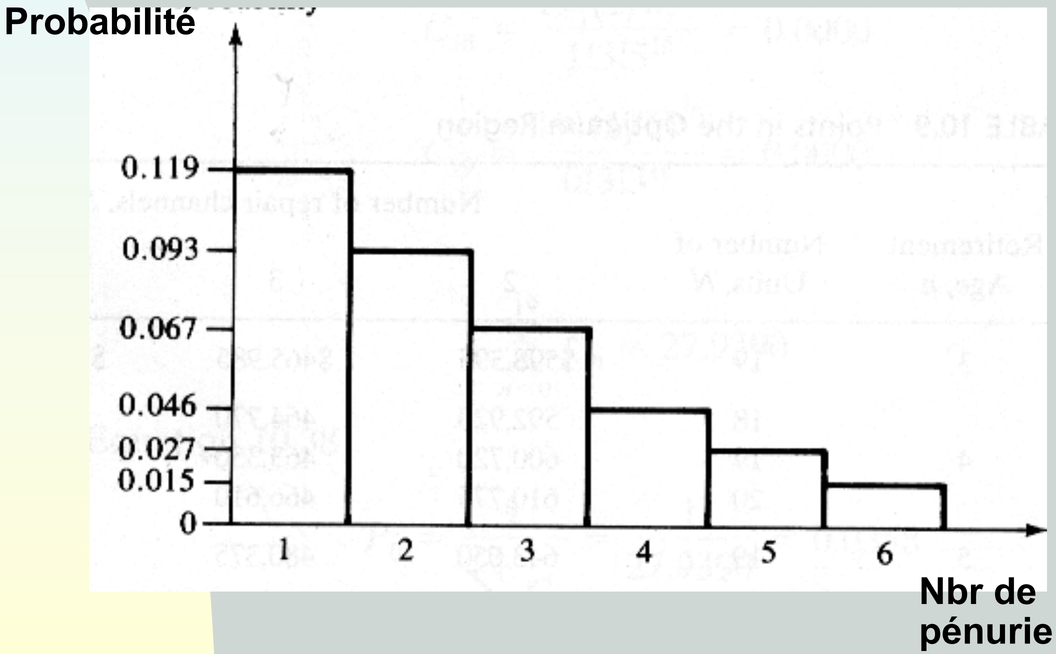
Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb I du REPS

La distribution de pénurie peut être calculée à partir de P_n et tracer en histogramme de Pr(S=s)=N-D+s. Ici, Pr(S=s)= P_{4+s}

Pr(S=0)=0.622; Pr(S=1)=0.119; Pr(S=2)=0.093; Pr(S=3)0.067;

Pr(S=4)=0.046;Pr(S=5)=0.027;Pr(S=6)=0.015;Pr(S=7)=0.008;Pr(S=8)=0.003

On aura l'histogramme suivant:



7.4 Application au Pb II du REPS

Dans ce cas, le décideur a le control sur un groupe de paramètres dépendants du design en plus du groupe de variables de design. On utilise alors la fonction d'évaluation $E=f(X,Y_d,Y_i)$.

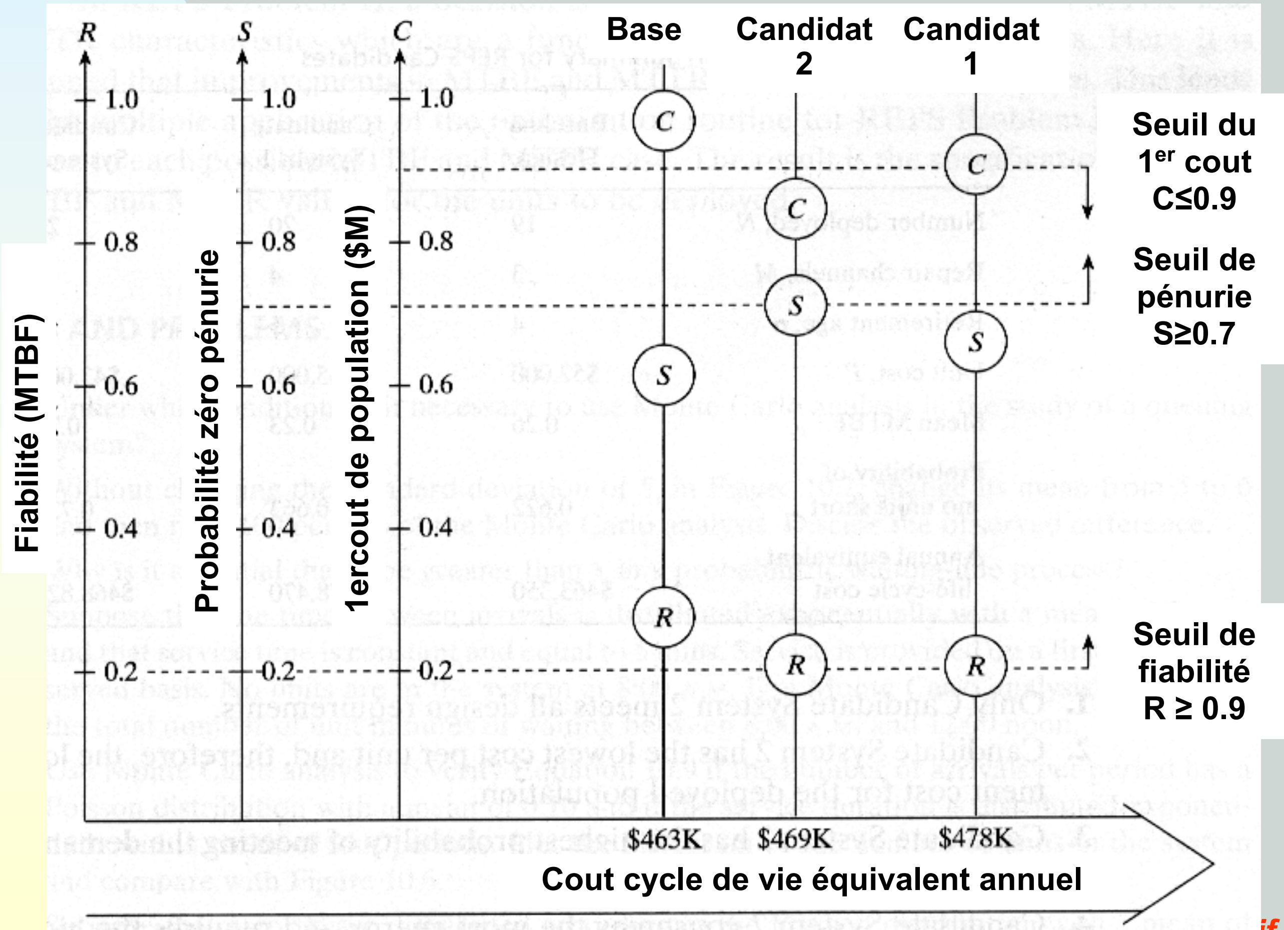
Dans ce cas, les paramètres dépendant du design seront utilisées pour chercher le candidat le plus acceptable.

Supposons les exigences suivantes:

1. **Le 1er cout de la population déployée ne doit pas dépasser $900000.**
2. **La probabilité de zéro pénurie unités de la demande doit être au moins égale à 0.70**
3. **Le MTBF moyen de l'unité le long de sa vie doit être au moins égal à 0.20 années.**
4. **Une unité ne peut être retenue en service plus de 04 ans.**

Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb II du REPS

Un exemple d'évaluation du design est donné en figure. On suppose qu'on a générer 02 candidats pour une demande de 15 unités équipements et les paramètres indépendants du design données en tableau (9.1). Les paramètres dépendant du design sont donnés en tableau (9.4)



Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb II du REPS

Les paramètres dépendant du design sont donnés en tableau (9.4)

Parameter	Candidate System 1		Candidate System 2	
Unit acquisition cost	$45,000		$43,000	
Unit design life	6 years		6 years	
Unit salvage value at end of design life	$6,000		$5,000	
Unit operating cost				
Energy and fuel	$600		$800	
Operating labor	500		700	
Preventative maintenance	400		400	
Other operating costs	400		400	
Age cohorts	MTBF	MTTR	MTBF	MTTR
0–1	0.16	0.04	0.18	0.04
1–2	0.21	0.04	0.21	0.04
2–3	0.26	0.05	0.25	0.05
3–4	0.26	0.06	0.25	0.05
4–5	0.26	0.06	0.23	0.06
5–6	0.24	0.06	0.20	0.06

Systèmes de population d'équipements réparables Application au Pb II du REPS

En optimisant par rapport aux variables de design pour chaque groupe de paramètres dépendants du design, on obtient les résultats suivants:

	Baseline Design	Candidate System 1	Candidate System 2
Number deployed, N	19	20	20
Repair channels, M	3	4	4
Retirement age, n	4	5	4
Unit cost, P	\$52,000	\$45,000	\$43,000
Mean MTBF	0.26	0.23	0.22
Probability of no units short	0.622	0.663	0.730
Annual equivalent life-cycle cost	\$463,350	\$478,470	\$468,825

On remarque que:

1. Seule le système candidat 2 qui vérifie les exigences de design.
2. Candidat 2 a le plus petit cout par unité, donc le plus petit cout d'investissement
3. Candidat 2 a la plus grande probabilité de rencontrer la demande pour 15 unités de service.
4. Candidat 2 consomme le plus d'énergie et exige le plus grand dépense pour main d'œuvre de fonctionnement.
5. Candidat 2 a une pénalité de cout cycle de vie équivalent annuel de \$468825 moins \$463360 soit \$5475 de plus mais un cout d'investissement petit

Merci. **Fin du chapitre 9**

Systems Engineering II

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Concepts de Contrôle et Techniques