Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Chap. 4

Techniques d’Approximation

COURS 4 **Mardi 26.05.2009**

4.1 Introduction

Le but de l'approche numérique est de pouvoir décrire une **formulation intégrale** des équations de comportement des systèmes physiques.

La MEF, permet de discrétiser une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème.

La formulation intégrale peut se faire en utilisant la méthode des **résidus pondérés** ou bien la méthode **variationnelle**.

Ces 02 méthodes **transforment** le système d'équations aux dérivées partielles à la formulation intégrale.

Transformation des équations d'un système physique

Formulation des équations

Système physique

Lois de la physique, science de l'ingénieur

Equations aux dérivées partielles

Transformation des équations

Méthode des résidus pondérés

Formulation Intégrale

Résolution numérique

Approximation des fonctions inconnues par éléments finis et organisation matricielle

Système d'équations algébriques

Résolution numérique du système

Solution approchée

4.2 Principe de la méthode des résidus pondérés

Considérons un problème stationnaire ayant comme formulation en équations différentielles ceci:

$$L_{2m}[\Phi] = r$$

L : est un opérateur différentiel linéaire

Φ: La variable d'état, inconnue (à calculer)

r : Fonction de sollicitation ou d'excitation

La solution du problème doit aussi satisfaire les conditions aux limites:

$$B_i[\Phi] = q_i \Big|_{\text{à la frontière } S_i} \qquad i=1,2\ldots$$

Les opérateurs sont généralement symétrique et défini positif:

Les opérateurs sont généralement symétrique

$$\int_D \left(L_{2m}\left[u\right]\right) v \, dD = \int_D \left(L_{2m}\left[v\right]\right) u \, dD$$

et défini positif:

$$\int_D \left(L_{2m}\left[u\right]\right) u \, dD \rangle 0$$

D: est le domaine de l'opérateur

u et v : 02 fonctions quelconques qui satisfont toutes les conditions aux limites (essentielles et naturelles)

Exemple

Considérons l'équation différentielle d'un système physique, comme suit:

$$-EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$u\big|_{x=0}=0$$

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L}=R$$

En faisant la correspondance avec notre opérateur, on voit que:

$$L_{2m} = -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ ; \ \phi = u \ ; \ r = 0$$

Et les C.L correspondants sont:

$$B_1 = 1 \ ; \ q_1 = 0$$

$$B_2 = EA\frac{\partial}{\partial x} \ ; \ q_2 = R$$

A partir de ceci, on peut facilement démontrer que l'opérateur est symétrique, défini et positif

Choix de la fonction

La 1ère étape dans la MRP, consiste à supposer une solution de la forme:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$$

Où:

f_i Sont des **fonctions d'essai** linéairement indépendantes

a_i sont des **multiplicateurs** à déterminer dans la solution

Les fonctions f_i doivent satisfaire toutes les CL.

En remplaçant dans l'équation partielle, on aura:

Résidu :

$$R = r - L_{2m}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right]$$

Si la solution est « exacte », R=0.

Solution approchée, il faut que R $\longrightarrow$ 0

Les différentes méthodes des résidus pondérés diffèrent dans le critère utilisé pour déterminer les multiplicateurs a_i de sorte que R est très petit.

i) ***<u>Méthode de Galerkin:</u>***

Les **a_i** sont déterminés à partir de « n » équations:

$$\int_D f_i R dD = 0 \qquad i = 1, 2..., n$$

D: Domaine de la solution

ii) *Méthode des moindres carrés:*

L'intégrale du carré du résidu est minimisée par rapport aux paramètres a_i

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_D R^2 dD = 0 \qquad i = 1, 2..., n$$

En remplaçant l'expression de R, on aura:

$$\int_D R\, L_{2m}\left[f_i\right] dD = 0 \qquad i = 1, 2..., n$$

D: Domaine de la solution

iii) Méthode de Collocation:

Dans cette technique, le résidu R est posé égal à « 0 » en certains points distincts dans le domaine de la solution pour obtenir « n » équations afin de déterminer les paramètres « a_i ».

iv) Méthode du sous domaine:

Le domaine complet est divisé en « n » sous domaines et l'intégral du résidu « R » sur chaque sous domaine est posé égal à « 0 » pour générer « n » équations afin de déterminer les paramètres « a_i ».

Les plus utilisées sont celle de Galerkin et des moindres carrés.

Conduisent à des matrices symétriques, définies positives.

Exemple

Considérons l'exemple simple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \qquad et \qquad u(1) = 0$$

Supposons une solution approchée de type:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$$

Supposons: $\bar{u} = a.x.(1-x) = a_1.f_1$

Avec: $f_1 = x(1-x)$

Le résidu sera:

$$R=\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\bar{u}+x \quad ; \qquad 0<x<1$$

$$\bar{u}(0)=0 \qquad et \qquad \bar{u}(1)=0$$

D'où

$$R=-2a-ax(1-x)+x$$

i) Méthode de Galerkin

$$\int_D f_i R dD=0 \qquad i=1,2...,n$$

$$\int_0^1 x(1-x)\{-2a-ax(1-x)+x\}dx=0$$

L'intégrale donne: a=0.2272

D'où: $\bar{u}=0.2272x.(1-x)$

ii) Méthode des moindres carrés

$$\int_D R\, L_{2m}\left[f_i\right] dD = 0 \qquad\qquad i = 1, 2..., n$$

$$L_{2m}\left[f_i\right] = \frac{d^2 f}{dx^2} - f = -2 - x(1-x)$$

En remplaçant dans l'intégrale et en calculant cette intégrale, on aura: a=0.2305

D'où: $\bar{u} = 0.2305x.(1-x)$

Comparons les résultats obtenus par différents méthodes au point **x=0.5**

Sol Exacte	Galerkin	Moindre Carrés
0.0566	**0.0568**	**0.0576**

On peut améliorer le résultat en augmentant le nbre de termes de la fonction d'essai. Soit par exemple:

$$\bar{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2 (1-x) = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

Le résidu sera:

$$R = a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x$$

Et On peut continuer…

4.3 Formulation faible

La formulation décrite avant est appelée **formulation forte** de la méthode des résidus pondérés. Ça nécessite l'évaluation de l'intégrale suivante (l'ordre le plus élevé)

$$\int_0^1 f_i\left(\partial^2 \overline{u}/\partial x^2\right)dx$$

Ça veut dire que la fonction doit être **02 fois différentiable** et sa dérivée seconde ne doit pas être nulle.

Pour **réduire l'ordre** de différentiabilité, on intègre par parties la formulation forte.

$$\int_0^1 f_i\left(\partial^2 \bar{u}/\partial x^2 - \bar{u} + x\right)dx = \int_0^1 \left(-\frac{df_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} - f_i\bar{u} + xf_i\right)dx + \left[f_i\frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1 = 0$$

Dans cette intégrale, on remarque qu'on a besoin uniquement de la 1ère dérivée de la fonction.

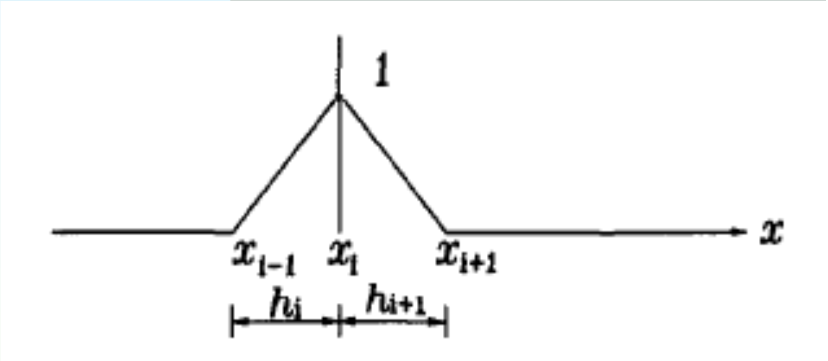
Donc, on aura besoin que de fonctions une fois différentiable.

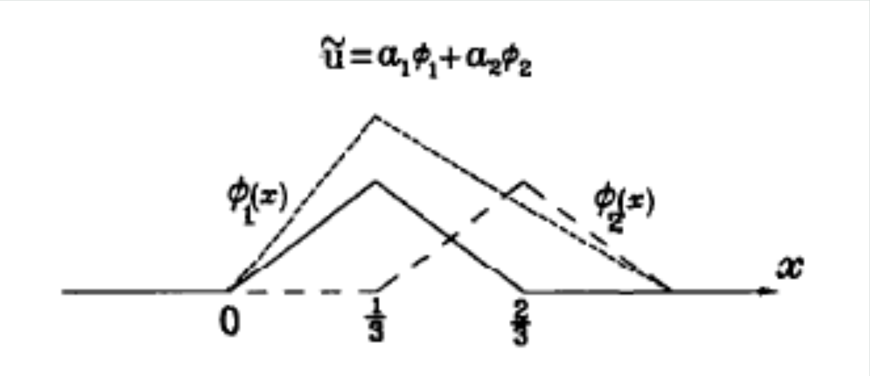
C'est la formulation faible.

Avantage: On obtient une matrice symétrique en termes de coefficients inconnus de la fonction d'essai.

4.4 Fonction linéaire en échelon

Utilisée surtout lorsque le domaine a une forme complexe ou bien a des conditions aux limites compliquées.





Fonction linéaire en échelon

Fonction d'essai linéaire en échelon

En 1D, la fonction est définie comme suit:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & pour\; x_{i-1} \le x \le x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & pour\; x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Exemple

Revenons à notre exemple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \quad et \quad u(1) = 0$$

Et dont la formulation faible s'écrit:

$$\int_0^1 \left(-\frac{df_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} - f_i \bar{u} + x f_i \right) dx + \left[f_i \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_0^1 = 0$$

Supposons:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{2} a_i \phi_i(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x)$$

Où: a_1 et a_2 sont les constantes inconnues et les fonctions Φ_1 et Φ_2 sont définies comme suit:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x & pour\, 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2-3x & pour\, 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 0 & pour\, 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Et

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & pour\, 0 \leq x \leq 1/3 \\ 3x-1 & pour\, 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3-3x & pour\, 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction est définie sur 02 intervalles, on peut utiliser plus d'intervalles:

La fonction d'essai s'écrira:

$$\bar{u} = \begin{cases} a_1(3x) & pour\, 0 \le x \le 1/3 \\ a_1(2-3x) + a_2(3x-1) & pour\, 1/3 \le x \le 2/3 \\ a_2(3-3x) & pour\, 2/3 \le x \le 1 \end{cases}$$

En utilisant Galerkin avec une formulation faible, on aura:

$$I_1 = \int_0^1 \left(-\frac{df_1}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} - f_1\bar{u} + xf_1 \right) dx = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(-\frac{df_2}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} - f_2\bar{u} + xf_2 \right) dx = 0$$

Le calcul de ces 02 intégrales, nous donne:

$$I_1 = -6.222 a_1 + 2.9444 a_2 + 0.1111 = 0$$

$$I_2 = 2.9444 a_1 - 6.2222 a_2 + 0.2222 = 0$$

La résolution de ce système nous donne:

a_1 =0.0448 et a_2 =0.0569

Donc, la fonction sera:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{2} a_i \phi_i(x) = 0.0448 \phi_1(x) + 0.0569 \phi_2(x)$$

Remarque:

Si on avait utiliser la **formulation forte**, on aurait obtenu de **mauvais résultat**, parce que la dérivée seconde de **u** s'annule dans tout le domaine.

4.5 Formulation élément fini de Galerkin

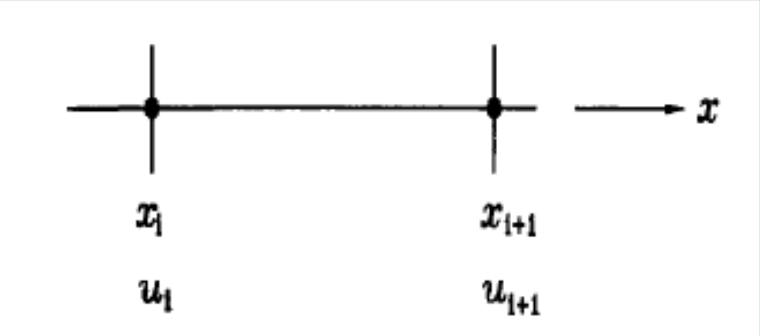
En augmentant le nombre d'intervalles, on peut représenter des fonctions complexes.

Les intervalles seront appelés des éléments finis.

Pour généraliser, on va calculer le résidu pondéré en utilisant les éléments finis et les fonctions en échelon.

Les coefficients généralisés « a_i» seront remplacés par les variables nodales.

Considérons l'élément linéaire à 02 nœuds.



x_i et x_{i+1} sont les coordonnées des nœuds.

u_i et u_{i+1} sont les variables nodales.

Supposons une fonction d'essai de type:

$$u = c_1 x + c_2$$

On va essayer d'exprimer la fonction u en fonctions de u_i et u_{i+1}

Ainsi:

$$u(x_i) = c_1 x_i + c_2 = u_i$$
$$u(x_{i+1}) = c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1}$$

La solution en c_1 et c_2 nous donne:

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

La fonction s'écrira alors:

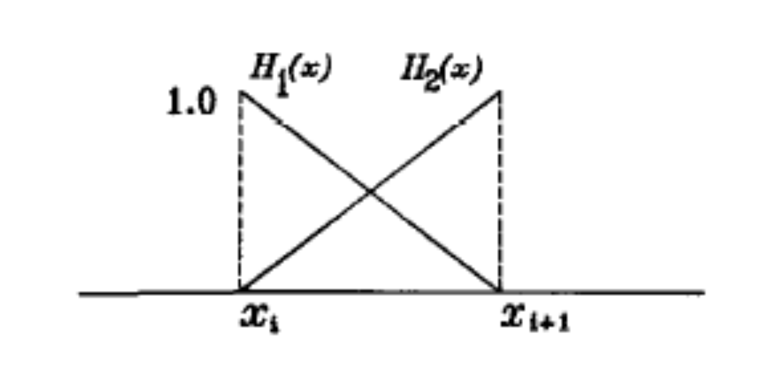
$$u = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} u_i + \frac{x - x_i}{h_i} u_{i+1} = H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1}$$

Avec: $h_i = x_{i+1} - x_i$

Ainsi:

La fonction « u » est exprimée en fonction des variables nodales.

H_1 et H_2 sont appelées **fonctions de forme**:



Doivent avoir les propriétés suivantes:

1. $H_i = 1$ en x_i et 0 ailleurs.
2. La somme de toutes les fonctions de forme est égale à « 1 ».

$$\sum_{i=1}^{2} H_i(x) = 1$$

Exemple

Revenons à notre exemple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

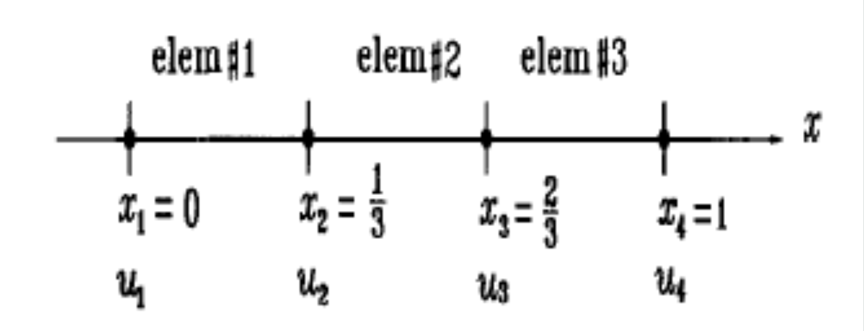
$$u(0) = 0 \qquad et \qquad u(1) = 0$$

Et dont la formulation faible s'écrit:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{df_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} - f_i \bar{u} + x f_i \right) dx + \left[f_i \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_0^1 = 0$$

Supposons:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{2} u_i H_i(x) = u_1 H_1(x) + u_2 H_2(x)$$



Pour un intervalle, on aura:

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right) dx \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} dx$$

Avec: H' sont les dérivées premières.

Le calcul de l'intégrale, nous donne:

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i}+\frac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h_i}{6}\left(x_{i+1}+2x_i\right) \\ \frac{h_i}{6}\left(2x_{i+1}+x_i\right) \end{Bmatrix}$$

En l'appliquant pour chaque élément, on aura:

Elément 1: $$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \end{Bmatrix}$$

Elément 2: $$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0741 \\ 0.0926 \end{Bmatrix}$$

Elément 3: $$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1296 \\ 0.1481 \end{Bmatrix}$$

Par assemblage, on aura:

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 - u'(0) \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 + u'(1) \end{Bmatrix} = 0$$

u' (0) et u' (1) sont les CL de Newman

Les CL de Dirichlet sont: u(0) = u(1) = 0

c.a.d $u_1 = 0$ et $u_4 = 0$

En remplaçant dans le système, on aura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution nous donne:

$u_1 = 0$, $u_2 = 0.0448$, $u_3 = 0.0569$ et $u_4 = 0$

On peut remplacer dans le 1er système pour calculer u'(0) et u'(1)

Ayant les u_i , on peut déterminer n'importe quel solution

Ex Elem 1 $\quad 0 \le x \le 1/3 \qquad u = H_1(x)u_1 + H_2(x)u_2 = 0.1344x$

4.6 Méthode Variationnelle

La méthode des **résidus pondérés** utilise directement la forme **différentielle** du problème et les CL.

La méthode **variationnelle**, utilise une **fonctionnelle** correspondante au problème aux dérivées partielles.

Une fonctionnelle **π** est une fonction d'un ensemble de fonctions et de leurs dérivées.

$$\pi = \pi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots)$$

La 1ère variation de π sera:

$$\delta\pi = \frac{\partial \pi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \pi}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \ldots$$

4.6.1 Principe

Le principe de la méthode variationnelle est de supposer une fonction d'essai de type:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$$

De la remplacer dans l'expression de π.

En considérant ensuite le principe de stationarité,

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0$$

on obtient « n » équations algébriques dont la solution nous donne les paramètres « a_i»

Considérons la fonctionnelle suivante:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$$

En appliquant la variationnelle, on aura:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \right) dx$$

Or la variation est calculée pour une valeur de « x » fixe, d'où « δx=0 »?

On applique ensuite le principe de stationnarité:

$$\delta J = 0$$

En intégrant par parties, le 2ème et le 3ème termes, on aura:

2ème terme:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\right)\right)dx$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\delta u\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\right)\delta u\,dx$$

3ème terme:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)dx$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\delta\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2}-\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\delta u\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\delta u dx$$

Ainsi, en assemblant tous les termes, on aura:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} \right) \delta u dx$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} \right) \delta u \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

Par identification, on aura:

Par identification, on aura:

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}=0$$

Equ. Differ. Du Pb (Equation Euler-Lagrange)

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\right)\delta u\right]_{x_1}^{x_2}=0$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}=0$$

Equations de conditions aux limites

Conditions aux limites:

Equations de conditions aux limites naturelles

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\right)\right]_{x_1}^{x_2}=0 \qquad \left[\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\right)\right]_{x_1}^{x_2}=0$$

Equations de conditions aux limites géométriques ou essentielles ou forcées

$$\delta u(x_1)=\delta u(x_2)=0 \qquad \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_1)=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_2)=0$$

Exemple

Considérons toujours le même exemple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \qquad et \qquad u(1) = 0$$

La variationnelle de cette équation est:

$$\delta J = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + u - x \right) \delta u dx + \left[\frac{du}{dx} \delta u \right]_0^1$$

Le 1^er^ terme est l'équation différentielle

Le 2^ème^ terme représente les CL de Newman (inconnues)

En appliquant l'intégrale par parties au 1er terme, on aura:

$$\delta J = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\frac{d(\delta u)}{dx} + u\delta u - x\delta u \right) dx$$

En réarrangeant les termes, on aura:

$$\delta J = \delta \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - xu \right) dx$$

Et la fonctionnelle sera:

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - xu \right) dx$$

Après, il suffit juste de minimiser cette fonctionnelle.

4.6.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode repose sur l'utilisation de fonctionnelle.

Elle peut se résumer en02 étapes:

1. Supposer une solution admissible satisfaisant les conditions de Dirichlet et contenant des coefficients inconnus.

2. Remplacer la fonction supposée dans la fonctionnelle et trouver les coefficients en minimisant cette fonctionnelle.

Exemple

Considérons toujours le même exemple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \qquad et \qquad u(1) = 0$$

Pour cet exemple, on suppose la fonction de type:

$$u = ax(1-x)$$

Qui satisfait les CL essentielles.

En remplaçant ceci dans la fonctionnelle, on aura:

$$J = \frac{1}{2}a^2\int_0^1 \left[(1-2x)^2 + x^2(1-x)^2\right]dx - a\int_0^1 x^2(1-x)dx$$

En minimisant la fonctionnelle:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0$$

Nous donne **a=0.2272**

La fonction approchée devient $u = 0.2272x(1-x)$

(Même que celle obtenue par Galerkin)

On peut ajouter d'autres termes pour améliorer la solution.

Considérons par ex: la fonction suivante:

$$u = a_1 x(1-x) + a_2 x^2 (1-x)$$

En remplaçant dans la fonctionnelle et ensuite en minimisant la fonctionnelle par rapport à a_1 et a_2 :

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0 \quad ; \qquad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0$$

On aura 02 équations à 02 inconnues.

La solution nous donne les valeurs des coefficients a_1 et a_2

4.7 Formulation élément fini de Rayleigh-Ritz

Pour généraliser, on va calculer la méthode variationnelle de Rayleigh-Ritz en utilisant les éléments finis et les fonctions en échelon.

Les coefficients généralisés « a_i» seront remplacés par les **variables nodales**.

On peut utiliser les fonctions linéaires en échelon pour des éléments à 02 nœuds.

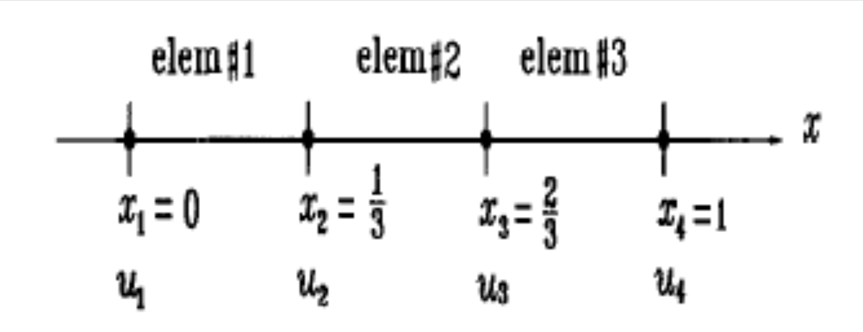
Exemple

Considérons toujours le même exemple:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \qquad et \qquad u(1) = 0$$

Pour cet exemple, la discrétisation est comme suit:



La fonctionnelle à utiliser sera:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - xu \right) dx$$

En utilisant la fonction de forme linéaire, la solution « u » pour l'élément « i » sera

$$\bar{u} = u_i H_1(x) + u_{i+1} H_2(x) = [H]\{u^i\}$$

$$[H] = [H_1 \quad H_2] \quad et \quad \{u^i\} = \{u_i \quad u_{i+1}\}^T$$

En remplaçant la fonction « u » dans la fopnctionnelle, on obtient:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - xu \right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\{u^i\}^T \left[\frac{dH}{dx}\right]^T \left[\frac{dH}{dx}\right]\{u^i\} + \\ \frac{1}{2}\{u^i\}^T [H]^T [H]\{u^i\} - \{u^i\}^T [H]^T x \end{array} \right) dx$$

Le calcul de cette intégrale nous donne:

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_i & u_{i+1} \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{3} & -\dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{6} \\ -\dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{6} & \dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} u_i & u_{i+1} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{h_i}{6}\left(x_{i+1}+2x_i\right) \\ \dfrac{h_i}{6}\left(2x_{i+1}+x_i\right) \end{Bmatrix}$$

En appliquant ceci pour chaque élément et en faisant l'assemblage (sommation sur les 04 éléments) on obtient:

$$J = \frac{1}{2}\{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}\begin{bmatrix} 3.1111 & -2.9444 & 0 & 0 \\ -2.9444 & 6.2222 & -2.9444 & 0 \\ 0 & -2.9444 & 6.2222 & -2.9444 \\ 0 & 0 & -2.9444 & 3.1111 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$-\{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}\begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 \end{Bmatrix}$$

Pour obtenir la solution, il faut minimiser J par rapport au vecteur $\{u_1\ u_2\ u_3\ u_4\}^T$

$$\begin{bmatrix} 3.1111 & -2.9444 & 0 & 0 \\ -2.9444 & 6.2222 & -2.9444 & 0 \\ 0 & -2.9444 & 6.2222 & -2.9444 \\ 0 & 0 & -2.9444 & 3.1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 \end{Bmatrix} = 0$$

En appliquant les CL , $u_1 = u_4 = 0$.

La solution finale, nous donne alors:

$u_1 = 0$, $u_2 = 0.0448$, $u_3 = 0.0569$ et $u_4 = 0$

Méthodes Numériques

Abdellatif MEGNOUNIF

Semaine Prochaine

Les Eléments Isoparamètriques

<u>COURS 5</u> **Samedi 30.05.2009**

Merci. **Fin du chapitre 4**