

# *Théorie de l'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Application 4**

**Problème de la torsion**

# 1. Introduction

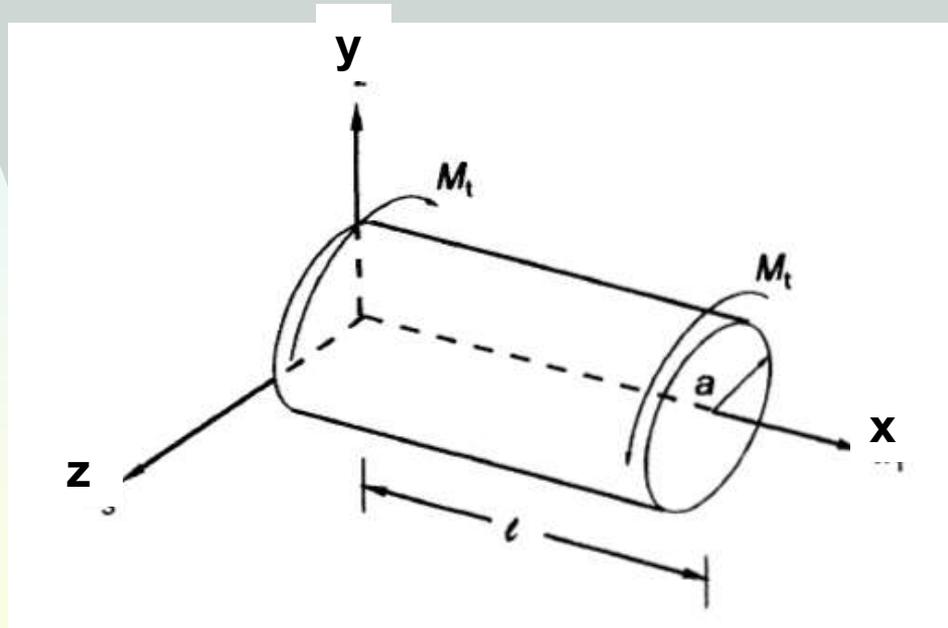
Le but de cette application est de traiter le problème de **la torsion** d'une poutre cylindrique en la considérant comme une structure à 03 dimensions et essayer de comparer le résultat obtenu par celui de la théorie des poutres classiques où on considère la poutre comme un élément unidimensionnel.



# Application

## Torsion d'un cylindre à section circulaire

On considère un cylindre à section circulaire de rayon «  $a$  » et de longueur «  $l$  » soumis à des moments de torsion aux extrémités ( $M_t$ ).



Par symétrie du problème, le mouvement de chaque plan de section transversale est une rotation de corps rigide autour de l'axe «  $x$  ».

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Si on considère «  $\theta$  » un angle de rotation petit, le champ de déplacement associé sera : «  $\theta(x)$  » est fonction de «  $x$  » seulement

$$U = (\theta \cdot e_1) \cdot r = (\theta \cdot e_1) \cdot (x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3) = \theta \cdot (y \cdot e_3 - z \cdot e_2)$$

Ou bien:

$$u = 0; \quad v = -\theta \cdot z; \quad w = \theta \cdot y$$

Avec:  $\theta = \theta(x)$

En intégrant le vecteur déplacement, on obtient les déformations:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = 0 ; \varepsilon_y = 0; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

A partir des déformations on peut déterminer les contraintes en utilisant les équations de Hooke sous forme Lamé.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon_v + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_v + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_v + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} ; \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} ; \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = 0 ; \varepsilon_y = 0 ; \varepsilon_z = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 0\end{aligned}$$

Dans notre cas, avec nos déformations, les contraintes seront:

$$\varepsilon_x = 0 ; \varepsilon_y = 0 ; \varepsilon_z = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 ; \sigma_y = 0 ; \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} &= -z \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= y \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Avec cette distribution de contraintes, il reste à vérifier les équations d'équilibre. Soit (en négligeant les forces de volume)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

Qui donne, pour les contraintes obtenues:



$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} &= -z \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= y \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -z \cdot G \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \\ -y \cdot G \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Par intégration, on a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta' = \text{Constante}$$

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

Vérifions maintenant les **conditions aux limites**.

Sur la surface latérale, on aura le vecteur normal:

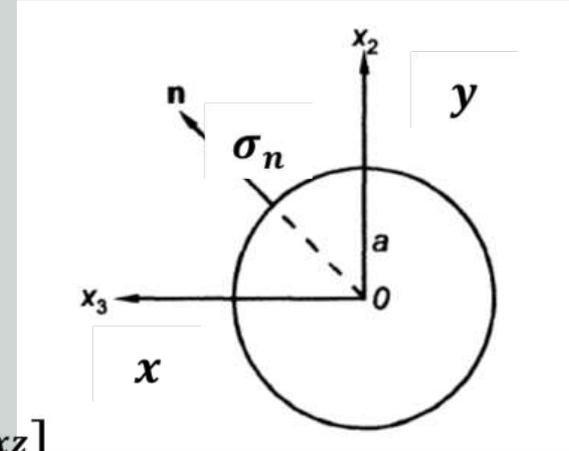
$$\sigma_n = \left(\frac{1}{a}\right) (y \cdot e_2 + z \cdot e_3)$$

Donc sur la surface latérale, on aura:

$$[\tau] = [\sigma][\sigma_n] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} y \cdot \tau_{xy} + z \cdot \tau_{xz} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les composantes de contraintes trouvées, on aura:

$$\tau = \frac{G}{a} (-y \cdot z \cdot \theta' + y \cdot z \cdot \theta') = 0$$



$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} &= -z \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= y \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

**Résultat vrai, puisqu'il n'ya que des moments de torsion, pas de force de traction aux extrémités.**

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

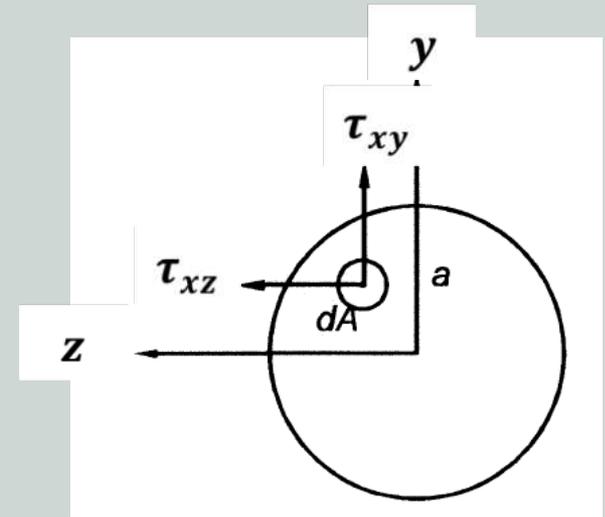
Sur la face «  $x=l$  », on aura le vecteur normal

$$\sigma_n = e_1$$

(Suivant la direction «  $x$  »)

D'où

$$\tau = \sigma \cdot e_1 = \tau_{xy} \cdot e_2 + \tau_{xz} \cdot e_3$$



La distribution de la traction de surface sur l'extrémité donne:

## Applications. (Suite) Torsion d'un cylindre à section circulaire

La distribution de la traction de surface sur l'extrémité donne:

$$R_x = \int \sigma_x dA = 0$$

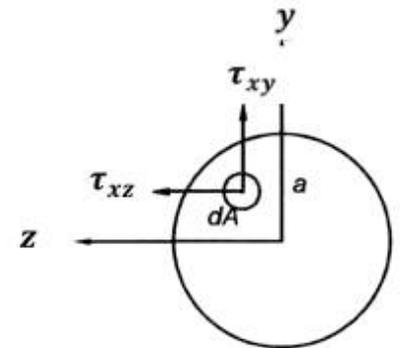
$$R_y = \int \tau_{xy} dA = -G \cdot \theta' \cdot \int z dA = 0$$

$$R_z = \int \tau_{xz} dA = G \cdot \theta' \cdot \int y dA = 0$$

$$M_x = \int (y \cdot \tau_{xz} - z \cdot \tau_{xy}) dA = G \cdot \theta' \cdot \int (y^2 + z^2) dA = G \cdot \theta' \cdot I_p$$

$$M_y = M_z = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} &= -z \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= y \cdot G \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$



Avec  $I_p = \pi \cdot a^4 / 2$  le moment d'inertie polaire.

De plus,  $\int y dA = \int z dA = 0$  puisque la surface est symétrique % aux axes.

**Merci. Fin de l'application**  
**4**