Abdellatif MEGNOUNIF

Application

Transformation de 02 systèmes Cartésiens

Introduction

Le but de cette application est de pouvoir transformer un tenseur d'un repère à un autre.

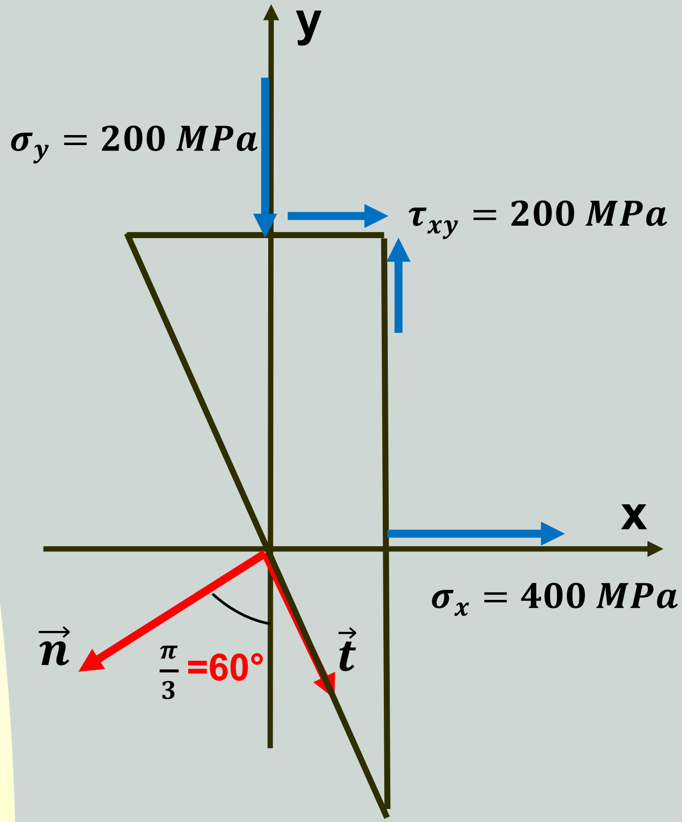
On aura aussi l'occasion de voir comment passer d'un repère quelconque (x, y , z) au repère (normale, tangentiel), pour transformer des contraintes de x, y et z vers des contraintes normales et tangentielle ?

On traite le cas plan puis on essaye de généraliser en 3D.

Exemple

Soit le tenseur des contraintes défini dans le plan de la figure suivante. On vous demande de définir:

1. La matrice de transformation du repère initial au repère de la la face (normal, tangentiel)
2. Calculer les contraintes normales et tangentielles à partir de la matrice de transformation



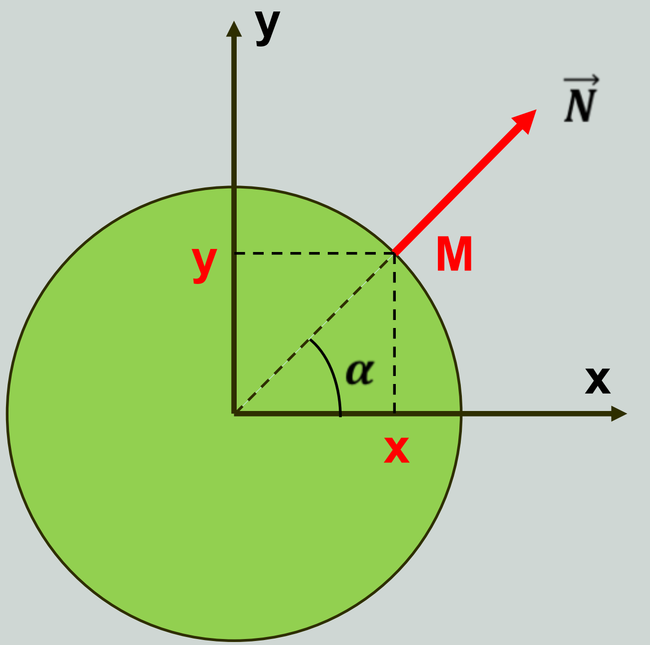
Normale et tangentielle ?

Normale ?

La normale est toujours perpendiculaire à la face vers l'extérieure

La normale est définie par ses cosinus directeurs

$$\vec{n} = l_1.\vec{e_1} + m_1.\vec{e_2} + n_1.\vec{e_3}$$



Avec:

l_1, m_1 et n_1 sont les cosinus directeurs

$l_1 = cos\,(N, x)$: cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe des « x »
$m_1 = cos\,(N, y)$: : cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe des « y »
$n_1 = cos\,(N, z)$:: cosinus de l'angle que fait la normale avec l'axe des « z »

En 2D (figure)

$$l_1 = cos\,(N, x) = \cos\alpha$$
$$m_1 = cos\,(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$$
$$n_1 = cos\,(N, z) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

D'où:

$$\vec{n} = cos\alpha.\vec{e_1} + sin\alpha.\vec{e_2}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{Bmatrix}$$

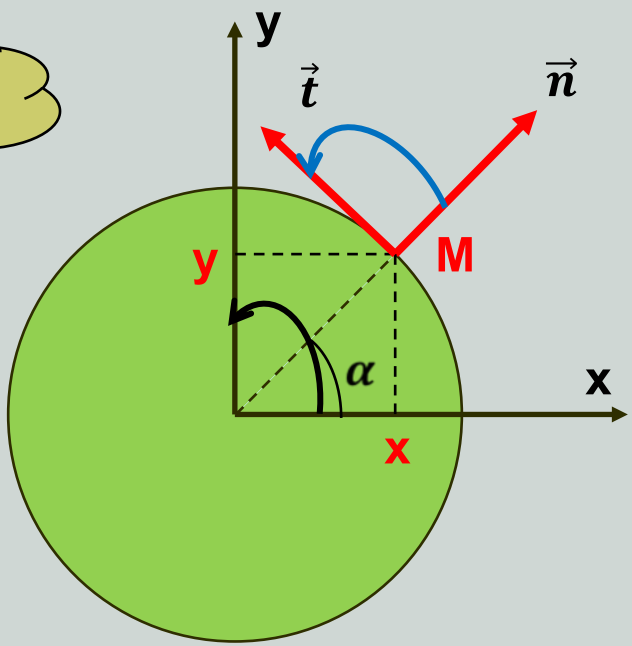
α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Normale et tangentielle ?

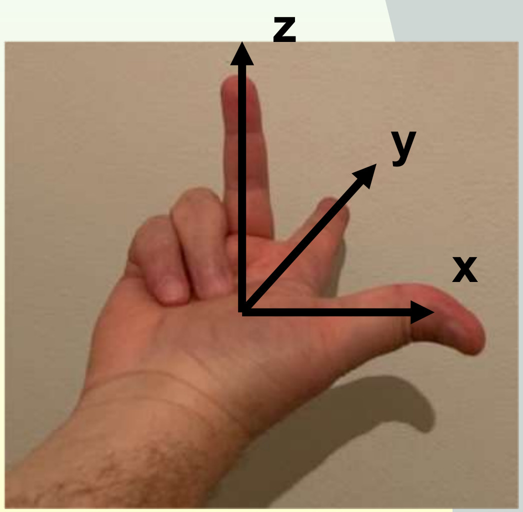
Tangentielle ?

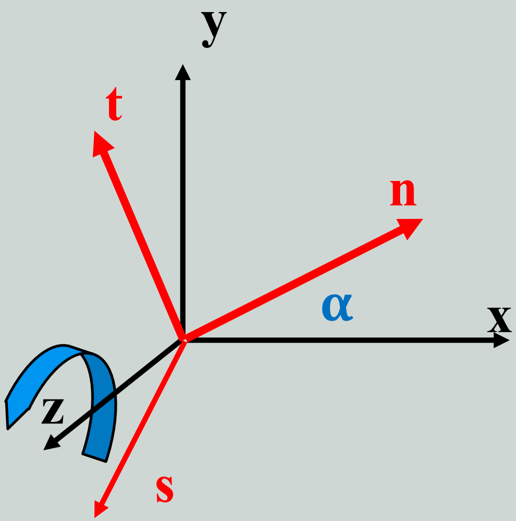
La tangentielle est toujours perpendiculaire à la normale

La rotation de $\vec{n}$ vers $\vec{t}$ se fera de la même manière et dans la même direction que la rotation de « x » vers « y ». Ces rotations dépendent de la 3ème direction (Règle des 03 doigts)



Ici l'axe « z » est sortant donc le 3ème axe de (n, t) est sortant aussi

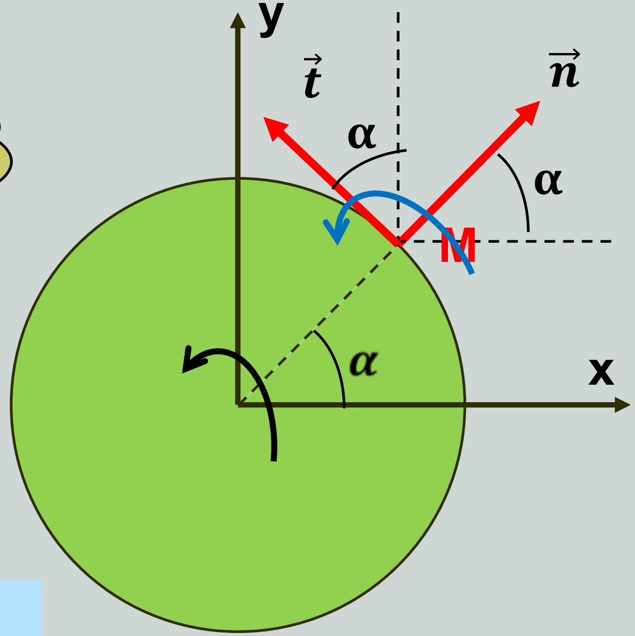




Transformation par rotation autour du 3ème axe

Normale et tangentielle ?

Tangentielle ?



$$\vec{t} = l_2.\overrightarrow{e_1} + m_2.\overrightarrow{e_2} + n_2.\overrightarrow{e_3}$$

Avec:

En 2D (figure)

$$l_2 = cos\,(t,x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha$$

$$m_2 = cos\,(t,y) = \cos\alpha$$

$$n_2 = cos\,(t,z) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Ainsi :

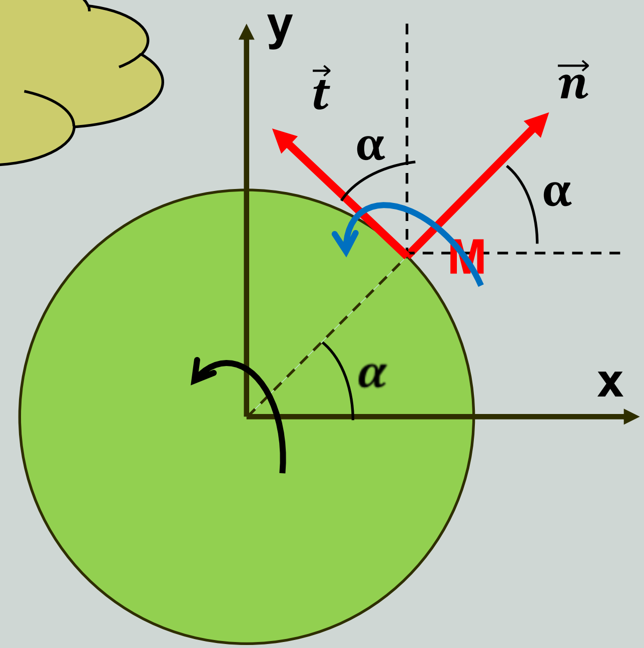
$$\vec{t} = -sin\alpha.\overrightarrow{e_1} + \cos\alpha.\overrightarrow{e_2}$$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} -sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Transformation ?

Matrice de transformation



Avec:

$$\vec{n} = l_1.\overrightarrow{e_1} + m_1.\overrightarrow{e_2}$$

$$l_1 = cos\,(N, x) = \cos\alpha$$
$$m_1 = cos\,(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Et

$$\vec{t} = l_2.\overrightarrow{e_1} + m_2.\overrightarrow{e_2}$$

$$l_2 = cos\,(t, x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha$$
$$m_2 = cos\,(t, y) = \cos\alpha$$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} -sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

La matrice de transformation sera :

En 2D (figure)

$$T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

Ou bien

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

D'où

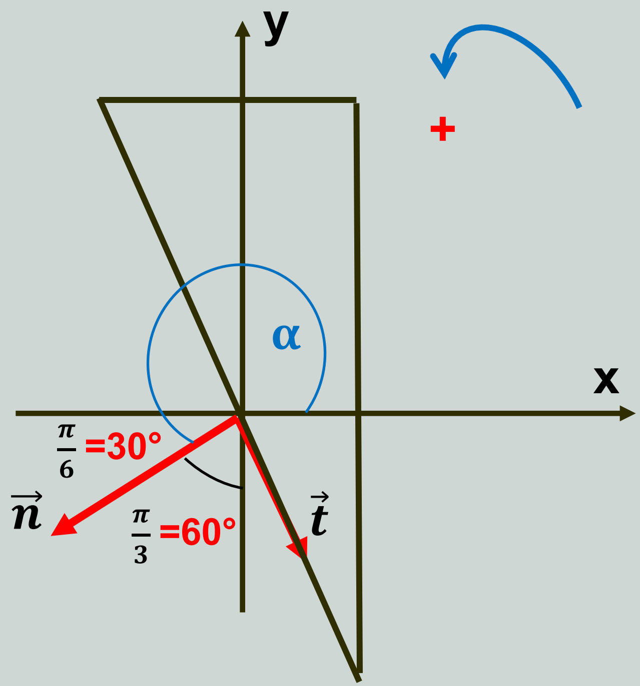
$$\begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Normale et tangentielle ?

En 2D ?

Application ?



La normale ? ➡ $\alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Ou bien :
Dans l'autre sens $\alpha = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$

D'où :

$$l_1 = cos\,(N,x) = \cos\alpha = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \overset{-1}{\cos\pi}\cos\frac{\pi}{6} - \overset{0}{\sin\pi}\sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$$

$$m_1 = cos\,(N,y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha = sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \overset{0}{\sin\pi}\cos\frac{\pi}{6} + \overset{-1}{\cos\pi}\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$$

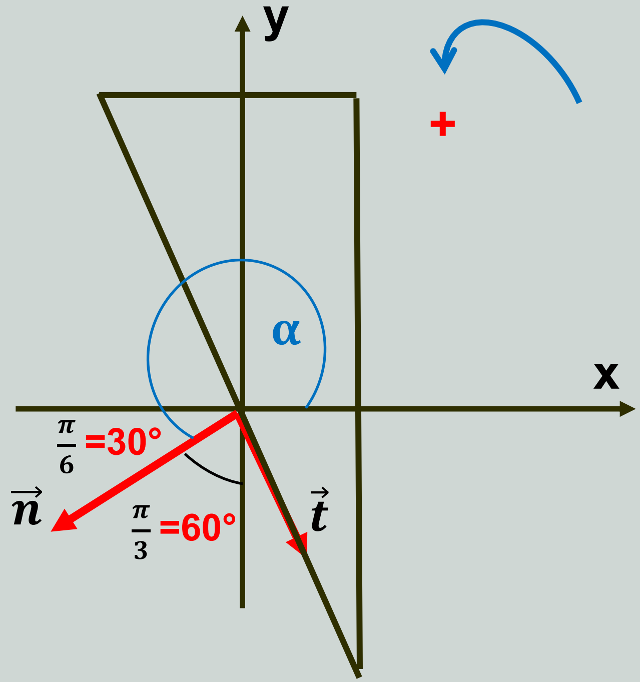
$$\vec{n} = cos\alpha.\vec{e_1} + sin\alpha.\vec{e_2}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Normale et tangentielle ?

La tangentielle ? ➡ $\alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$



D'où: $\vec{t} = l_2.\overrightarrow{e_1} + m_2.\overrightarrow{e_2}$

$$l_2 = cos\,(t,x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha \;\; = -sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\overset{0}{sin\pi}\cos\frac{\pi}{6} - \overset{-1}{cos\pi}\sin\frac{\pi}{6} = +\sin\frac{\pi}{6}$$

$$m_2 = cos\,(t,y) = \cos\alpha = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \overset{-1}{cos\pi}\cos\frac{\pi}{6} - \overset{0}{sin\pi}\sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\vec{t} = -sin\alpha.\overrightarrow{e_1} + \cos\alpha.\overrightarrow{e_2}$$

Ainsi :

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} -sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{Bmatrix} +\sin\frac{\pi}{6} \\ -\cos\frac{\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Matrice de transformation ?

Matrice de transformation

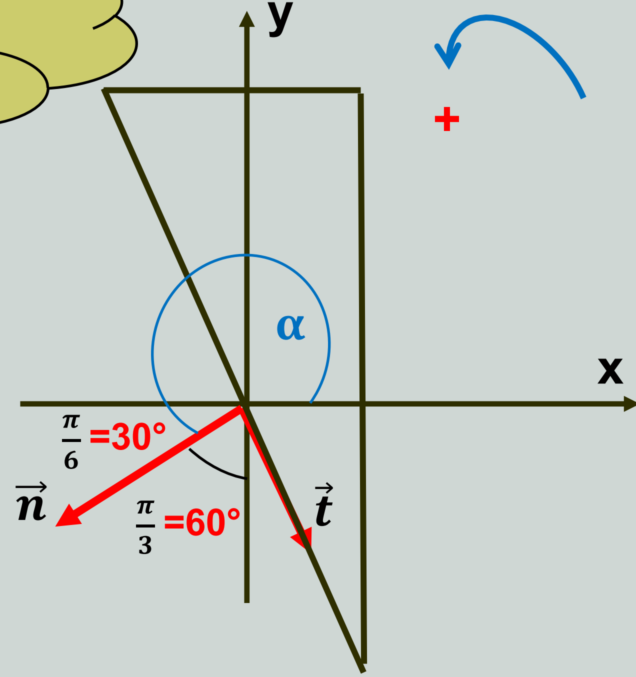
Avec:

$$\vec{n} = l_1.\overrightarrow{e_1} + m_1.\overrightarrow{e_2}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

Et $$\vec{t} = l_2.\overrightarrow{e_1} + m_2.\overrightarrow{e_2}$$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} +\sin\frac{\pi}{6} \\ -\cos\frac{\pi}{6} \end{Bmatrix}$$



La matrice de transformation sera :

$$T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

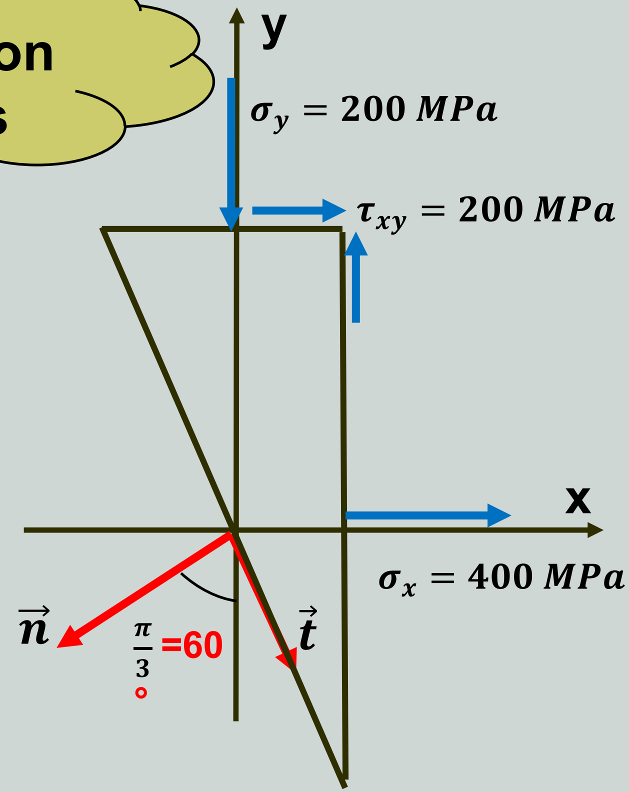
Ou bien

$$T = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} & +\sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Transformation des contraintes ?

Transformation Contraintes



Avec:

Transformation des composantes de contraintes vers la normale et tangentielle:

Les composante de contraintes seront (q_x, q_y) :

Repère (x,y)

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

Dans le plan « n, t » les mêmes composante de contraintes seront (σ_n, t) :

$$\sigma_n = [l_1 \quad m_1] \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = [l_1 \quad m_1][\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = [l_1 \quad m_1] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

$$t = [l_2 \quad m_2] \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = [l_2 \quad m_2][\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = [l_2 \quad m_2] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = [T]^T [\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Transformation des contraintes ?

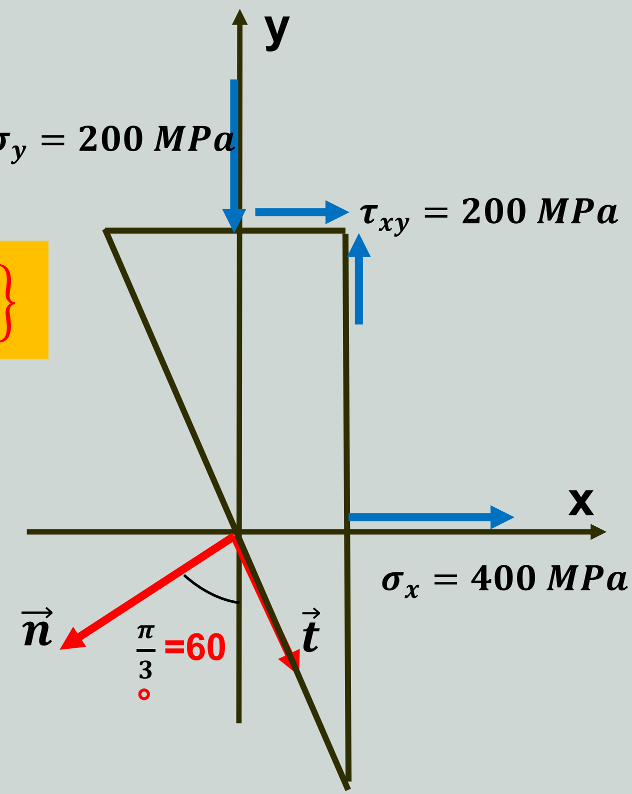
$$T = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} & +\sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

Avec:

Application

Pour notre application

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = [T]^T [\sigma] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ +\sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 & 200 \\ 200 & -200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

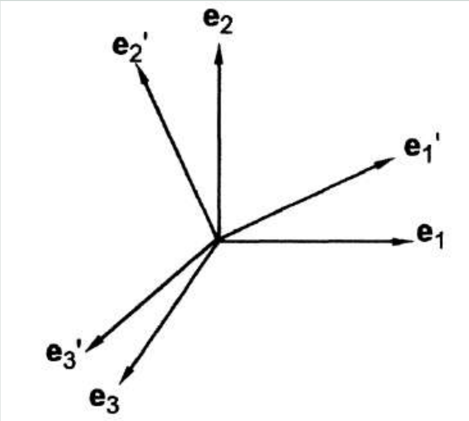
$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 423,182 \\ -159,808 \end{Bmatrix}$$

α : Angle que fait la normale avec l'axe des « x »

Un peu plus théorique et général

2D vers 3D

Matrice de transformation de 02 systèmes cartésiens



Soient 02 systèmes cartésiens définis par les vecteurs unités «$\vec{e_i}$ » et «$\vec{e_i'}$ »
On peut obtenir l'un de l'autre par rotation de de corps rigide ou par rotation suivie d'une réflexion.

$$\overrightarrow{e_i'} = \mathrm{T}\,\overrightarrow{e_i} = T_{mi}.\overrightarrow{e_m} \qquad (1)$$

i.e.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1'} &= T_{11}.\overrightarrow{e_1} + T_{21}.\overrightarrow{e_2} + T_{31}.\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_2'} &= T_{12}.\overrightarrow{e_1} + T_{22}.\overrightarrow{e_2} + T_{32}.\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_3'} &= T_{13}.\overrightarrow{e_1} + T_{23}.\overrightarrow{e_2} + T_{33}.\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\vec{n} &= l_1.\overrightarrow{e_1} + m_1.\overrightarrow{e_2} + n_1.\overrightarrow{e_3}\\ \vec{t} &= l_2.\overrightarrow{e_1} + m_2.\overrightarrow{e_2} + n_2.\overrightarrow{e_3}\\ \vec{s} &= l_3.\overrightarrow{e_1} + m_3.\overrightarrow{e_2} + n_3.\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

Où

$$T_{im}.Tj_m = T_{mi}.Tmj = \delta_{ij} \Rightarrow [T]\,[T]^T = [I]$$

On note que:

$$T_{11} = \overrightarrow{e_1}\,T\,\overrightarrow{e_1} = e_1.e_1' = cos(e_i, e_j') \ldots$$

D'où:

$$T_{ij} = cos(e_i, e_j') = e_i.e_j' \qquad (2)$$

La matrice de ces cosinus directeurs est appelée matrice de transformation des axes.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}$$

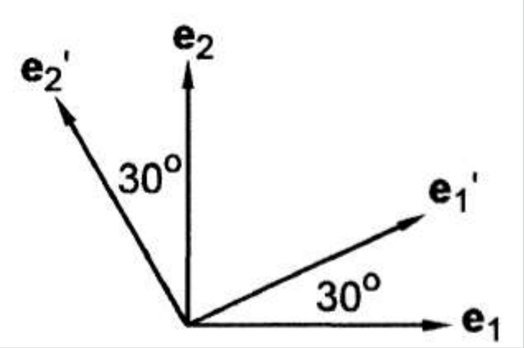
Ou bien

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}$$

Application

Exemple

Trouver la matrice de transformation du repère «$\overrightarrow{e'_i}$ » obtenu par rotation du repère «$\overrightarrow{e_i}$ » de 30° par rapport à « e_3 ».



e_3 coïncide avec e'_3.

En utilisant l'équation (2), on a:

$$T_{ij} = cos\left(e_i, e'_j\right) = e_i . e'_j$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = cos(e_1, e'_1) = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$T_{21} = cos(e_2, e'_1) = cos60° = \frac{1}{2}$$
$$T_{31} = cos(e_3, e'_1) = cos90° = 0$$

$$T_{12} = cos(e_1, e'_2) = cos120° = -\frac{1}{2}$$
$$T_{22} = cos(e_2, e'_2) = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$T_{32} = cos(e_3, e'_2) = cos90° = 0$$

$$T_{13} = cos(e_1, e'_3) = cos90° = 0$$
$$T_{23} = cos(e_2, e'_3) = cos90° = 0$$
$$T_{33} = cos(e_3, e'_3) = cos\ 0° = 1$$

Matrice de transformation

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation des composantes de vecteurs

Transformation Vecteurs

Soit un vecteur « a » qlq avec comme composantes (par rapport à «$\overrightarrow{e_i}$ » et «$\overrightarrow{e'_i}$»)

$$a_i = a\,\overrightarrow{e_i} \quad \text{et} \quad a'_i = a\,\overrightarrow{e'_i}$$

Or

$$\overrightarrow{e'_i} = \mathrm{T}\,\overrightarrow{e_i} = T_{mi}.\overrightarrow{e_m} \qquad (1)$$

$$a'_i = a\,T_{mi}.\overrightarrow{e_m} = T_{mi}(a.\overrightarrow{e_m}) = T_{mi}.a_m \qquad (3)$$

Ou bien

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

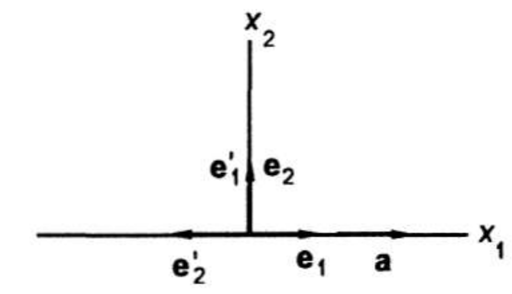
Ou bien

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$[a]' = [T]^T[a]$$

Application

Trouver les composantes du vecteur a(2,0,0) dans le nouveau repère «$\overrightarrow{e'_i}$ » obtenu par rotation de 90° contraire aux aiguilles d'une montre autour de l'axe « e_3 ».



La matrice de transformation est, avec $e'_1=e_2$, $e'_2= - e_1$ et $e'_3=e_3$.

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$[a]' = [T]^T[a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = 2.\overrightarrow{e_1} = -2.\overrightarrow{e'_2}$$

Transformation des composantes de tenseurs

Transformation Tenseurs

Soit un tenseur «$[\sigma]$ » qlq avec comme composantes (par rapport à «$\overrightarrow{e_i}$ » et «$\overrightarrow{e_i'}$ »)

$$\sigma_{ij} = \overrightarrow{e_i} \,.\, \sigma\, \overrightarrow{e_j} \quad \text{et} \quad T'_{ij} = \overrightarrow{e'_i} . \sigma\, \overrightarrow{e'_j}$$

Or $\overrightarrow{e'_i} = \mathrm{T}\, \overrightarrow{e_i} = T_{mi}.\overrightarrow{e_m}$ (1)

$$T'_{ij} = T_{mi}.\overrightarrow{e_m}.\sigma\, T_{nj}\overrightarrow{e_n} = T_{mi}T_{nj}(\overrightarrow{e_m}.\sigma\, T_{nj}\overrightarrow{e_n}) \quad (4)$$

D'où:

$$\sigma'_{ij} = T_{mi}T_{nj}\sigma_{mn} \quad (5)$$

En matriciel

$$[\sigma]' = [T]^T[\sigma][T]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

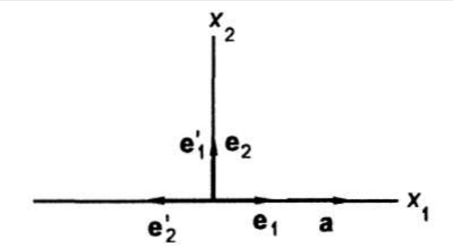
Ou bien, l'inverse

$$\sigma_{ij} = T_{im}.T_{jn}.\sigma'_{mn} \quad (6)$$

$$[\sigma] = [T][\sigma]'[T]^T$$

Application

Exemple



Soit la matrice du tenseur $[\sigma]$,

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Déterminer la transformée des composantes de ce tenseur dans le nouveau repère obtenu par rotation (contre aiguilles montre) de 90° par rapport à e_3.

La matrice de transformation est, avec $e'_1=e_2$, $e'_2=-e_1$ et $e'_3=e_3$.

$$[T]=\begin{bmatrix}l_1&l_2&l_3\\m_1&m_2&m_3\\n_1&n_2&n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Nouvelles composantes du tenseur ?

$$[\sigma]'=[T]^T[\sigma][T]$$

$$\begin{bmatrix}\sigma'_x&\tau'_{xy}&\tau'_{xz}\\\tau'_{xy}&\sigma_y&\tau'_{yz}\\\tau'_{xz}&\tau'_{yz}&\sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Soit :

$$[\sigma]'=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Merci. **Fin de l'Application**