Théorie d'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 11

Elasticité Plane en CP

Barre courbe soumise à l'action d'une force appliquée à son extrémité

COURS 12 **Jeudi 29.08.2024**

Application

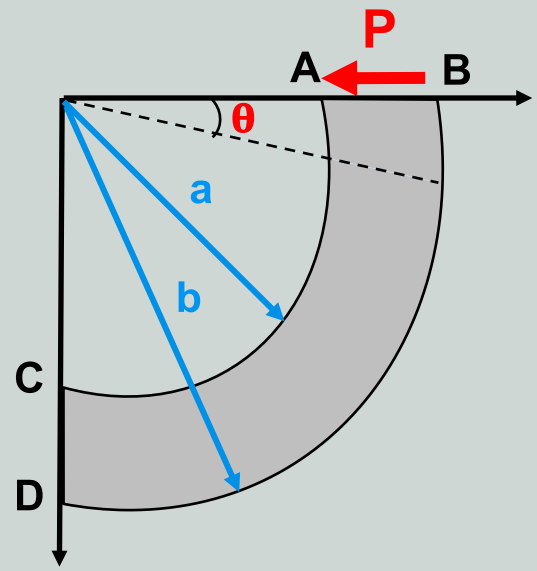
Le but de cette application est de calculer la distribution des contraintes et le vecteur déplacement en n'importe quel point d'une poutre courbe plane en coordonnées polaires soumise à une force quelconque à son extrémité.

Il s'agit d'un problème général dont la distribution des contraintes n'est pas forcément symétrique.

Application

Considérons une poutre courbe à 90° de rayon, intérieur « a » et de rayon extérieur « b » sollicitée à la flexion à sa face supérieure par une force « P » agissant suivant le rayon du cercle.

Déterminer les composantes des contraintes en passant par une fonction d'Airy. Utiliser comme fonction $\varphi(r,\theta) = f(r)\,sin\,\theta$
Déterminer le vecteur déplacement (u, v) en n'importe quel point $M(r,\theta)$ de cette poutre.
Si la face « CD » est encastrée, déterminer la flèche maximale (suivant le rayon) de la face « AB ».



Application

Le problème est quelconque. D'où :

Etape 1 : $\varphi(r,\theta)$ **biharmonique ?** $\varphi(r,\theta) = f(r)\sin\theta$

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}f(r)$$

D'où :

$$\nabla^4(\varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}f(r)\right) = 0$$

En développant

$$\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} - \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{3}{r^4}f = 0$$

Dont la solution sera

$$f(r) = Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Drlogr$$

D'où:

$$\varphi(r,\theta) = \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Drlogr\right)sin\theta$$

A, B, C et D : constantes à déterminer par les CL de chargement

Application

Le problème est quelconque. D'où :

Etape 2 : Distribution des contraintes ?

On a :

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \end{cases}$$

Avec :

$$\varphi(r,\theta) = \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Drlogr\right)sin\theta$$

On obtiendra

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)sin\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)cos\theta$$

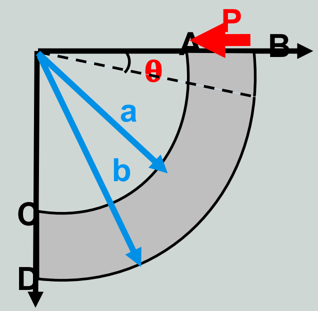
Application

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin\theta$$
$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin\theta$$
$$\tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\cos\theta$$

Etape 3 : Conditions aux limites de chargement ?

On a :

$$\begin{cases} \bar{R} = l\,\sigma_r + m\,\tau_{r\theta} \\ \bar{S} = l\,\tau_{r\theta} + m\,\sigma_\theta \end{cases}$$



Avec:

Face intérieure $r = a$

$\bar{R} = 0$ et $l = -1$

$\bar{S} = 0$ $m = 0$

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Face extérieure $r = b$

$\bar{R} = 0$ et $l = 1$

$\bar{S} = 0$ $m = 0$

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Face supérieure AB $(\theta = 0)$

$\bar{R} = -dP/dr$ et $l = 0$

$\bar{S} = 0$ $m = -1$

$$\begin{cases} \int_a^b \tau_{r\theta}dr = P \\ \sigma_\theta = 0 = 0\ (\text{Sin}0) \end{cases}$$

$r = a$ $\quad \sigma_r = \left(2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a}\right)\sin\theta = 0$ **(1)**

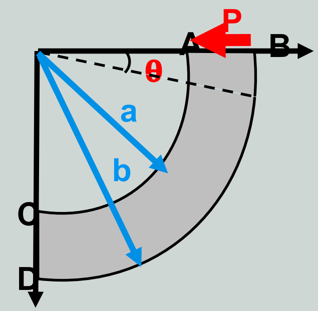
$(\theta = 0)$ $\quad \int_a^b \tau_{r\theta}dr = P$

$r = b$ $\quad \sigma_r = \left(2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b}\right)\sin\theta = 0$ **(2)**

$$\int_a^b -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)dr = P \quad \textbf{(3)}$$

Application

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$
$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$
$$\tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) cos\theta$$



(1) $$\sigma_r = \left(2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a}\right) sin\theta = 0 \Rightarrow \sigma_r = \left(2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a}\right) = 0$$

(2) $$\sigma_r = \left(2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b}\right) sin\theta = 0 \Rightarrow \sigma_r = \left(2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b}\right) = 0$$

(3) $$\int_a^b -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) dr = P \Rightarrow \left[-Ar^2 - \frac{B}{r^2} - Dlogr\right]_a^b = P$$

03 éqs à 03 inconnues.

Solution : $A = \frac{P}{2\beta}$ $\quad B = -\frac{Pa^2b^2}{2\beta}$ $\quad D = -\frac{P(a^2+b^2)}{\beta}$

Avec $$\beta = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)log\frac{b}{a}$$

D’où

$$\sigma_r = \left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta$$
$$\sigma_\theta = \left(\frac{3Pr}{\beta} - \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta$$
$$\tau_{r\theta} = -\left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) cos\theta$$

Application

$$\sigma_r = \left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta \qquad \sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{3Pr}{\beta} - \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta \qquad \sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) cos\theta \qquad \tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) cos\theta$$

Composantes de déplacements ?

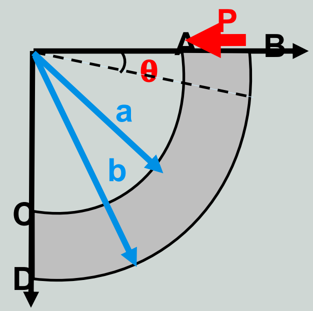
Par intégration ?

On a :

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned}\right.$$



$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) = \frac{1}{E}\left[2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} - \nu\left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\right] sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{sin\theta}{E}\left[2Ar(1-3\nu) - \frac{2B}{r^3}(1+\nu) + \frac{D}{r}(1-\nu)\right]$$

D'où

$$u(r,\theta) = \frac{sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)logr\right] + f(\theta)$$

Application

$$\sigma_r = \left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta \qquad \sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(\frac{3Pr}{\beta} - \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) sin\theta \qquad \sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\left(\frac{Pr}{\beta} + \frac{Pa^2b^2}{\beta r^3} - \frac{P(a^2+b^2)}{\beta r}\right) cos\theta \qquad \tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) cos\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = r\varepsilon_\theta - u = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) - u$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{sin\theta}{E}\left[2Ar^2(3-\nu) + \frac{2B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu) - Ar^2(1-3\nu) - \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D(1-\nu)logr\right] - f(\theta)$$

D'où

$$v(r,\theta) = \frac{-cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D(1-\nu)logr + D(1-\nu)\right] - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

Déterminer $f(\theta)$ et $g(r)$? **Par** $\gamma_{r\theta}$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{-\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) cos\theta}{G}$$

Application

$$\sigma_r = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$
$$\sigma_\theta = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) sin\theta$$
$$\tau_{r\theta} = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) cos\theta$$

Avec

$$u(r,\theta) = \frac{sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)logr\right] + f(\theta)$$

$$v(r,\theta) = \frac{-cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D(1-\nu)logr + D(1-\nu)\right] - \int f(\theta)d\theta + g(r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$
$$= \frac{cos\theta}{E}\left[-4Ar(1+\nu) + \frac{4B}{r^3}(1+\nu) + \frac{2D}{r}(1-\nu)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial g(r)}{\partial r}$$
$$+ \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{-\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)cos\theta}{G} = \frac{-cos\theta}{E}\left(4Ar(1+\nu) - \frac{4B}{r^3}(1+\nu) + \frac{2D}{r}(1+\nu)\right)$$

Par égalité

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial g(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r) = \frac{cos\theta}{E}\left[-\frac{4D}{r}\right]$$

Ou bien :

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + r\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \int f(\theta)d\theta - g(r) = \frac{-4Dcos\theta}{E}$$

Application

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial g(r)}{\partial r} + \int f(\theta)d\theta - g(r) = \frac{-4D\cos\theta}{E}$$

Par identification

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \int f(\theta)d\theta = \frac{-4D\cos\theta}{E} \quad \Rightarrow \quad f(\theta) = \frac{-2D\,\theta\cos\theta}{E} + K\sin\theta + L\cos\theta$$

$$r\frac{\partial g(r)}{\partial r} - g(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(r) = H\,r$$

En remplaçant, on aura finalement :

$$u(r,\theta) = \frac{-2D\,\theta\cos\theta}{E} + \frac{\sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\log r\right] + K\sin\theta + L\cos\theta$$

$$v(r,\theta) = \frac{2D\,\theta\sin\theta}{E} - \frac{\cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D(1-\nu)\log r\right] + \frac{\cos\theta}{E}D(1+\nu) + H\,r + K\cos\theta - L\sin\theta$$

A, B et D : constantes déjà calculées (CL de chargement)

$$A = \frac{P}{2\beta} \qquad B = -\frac{Pa^2b^2}{2\beta} \qquad D = -\frac{P(a^2+b^2)}{\beta} \qquad \beta = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log\frac{b}{a}$$

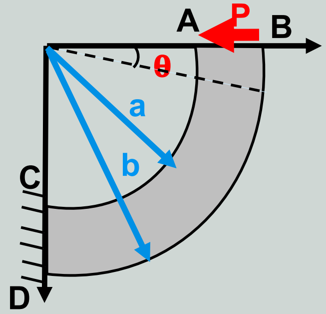
H, K et L : constantes à déterminer par les conditions aux limites de déplacements.

Application

$$u(r,\theta) = \frac{-2D\,\theta\cos\theta}{E} + \frac{\sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\log r\right] + K\sin\theta + L\cos\theta$$

$$v(r,\theta) = \frac{2D\,\theta\sin\theta}{E} - \frac{\cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D(1-\nu)\log r\right] + \frac{\cos\theta}{E}D(1+\nu) + H\,r + K\cos\theta - L\sin\theta$$

Exemple: calculons la flexion suivant la direction du rayon que subit l'extrémité supérieure sachant que l'extrémité inférieure est encastrée.



On calcule $\mathbf{u(\theta = 0)}$?

$$u(\theta = 0) = L$$

face $(\theta = \pi/2)$ encastrée $\Rightarrow$ $v(r,\pi/2) = 0$ **et** $\dfrac{\partial v(r,\pi/2)}{\partial r} = 0$

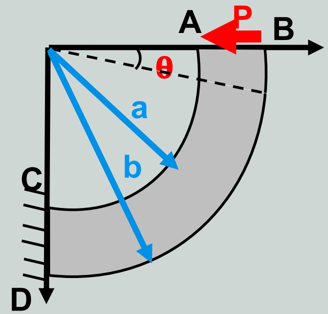
$v(r,\pi/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{D\,\pi}{E} - L + Hr = 0$ **et** $\dfrac{\partial v(r,\pi/2)}{\partial r} = H = 0$

D'où: $H = 0$ **et** $L = \dfrac{D\,\pi}{E}$

D'où, la flèche de l'extrémité supérieure;

$$u(\theta = 0) = L = \frac{D\,\pi}{E}$$

Application



$$u(\theta = 0) = L = \frac{D\,\pi}{E}$$

En remplaçant « D »,

$$u(\theta = 0) = L = \frac{D\,\pi}{E} \qquad D = -\frac{P(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\log\frac{b}{a}}$$

$$u(\theta = 0) = \frac{-\,\pi}{E}\frac{P(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\,\log\frac{b}{a}} \qquad \textbf{(4)}$$

Si $b \to a$ et que $h = b - a$ est faible devant « a », on peut écrire

$$\log\frac{b}{a} = \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{a^3} + \cdots$$

En substituant cette valeur dans (4) et en négligeant les termes de degrés supérieurs à 3, on aura:

$$\boxed{u(\theta = 0) = \frac{-\,3\,\pi\,a^3 P}{E\,h^3}}$$

Valeur donnée par la théorie des poutres courbes (RDM classique)

Merci. Fin de l'application 11