

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

e-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 24

Analyse temporelle de la réponse modale non couplée (2002)

Uncoupled modal response history analysis (UMRHA)

Méthodes Statiques non Linéaires équivalentes

Point de performance ou bien
déplacement cible sur la courbe
Push Over

Approche de
linéarisation
équivalente

- ✓ ATC 40 : Méthode du spectre de capacité (aussi FEMA 273 et FEMA 356) (Chapitre 20)
- ✓ FEMA 440 Procédure de linéarisation équivalente améliorée (ATC 55) (**Chapitre 20**)

Approche de
modification
du
déplacement

- ✓ FEMA 273 (FEMA 356) : Méthode du coefficient de déplacement (ATC 40) (**Chapitre 21**)
- ✓ FEMA 440, ASCE 41-06 et ASCE 41-13: Méthode du coefficient de déplacement améliorée (ATC 55) (**Chapitre 21**)

Autres

- ✓ NLRHA du S1DDL équivalent (**Chapitre 22**)
- ✓ Méthode N2 (Chapitre 23)
- ✓ **Procédures d'analyse sismique basées sur multi-mode approximation (Chapitre 24, 25, 26 et 27)**

NLRHA : NonLinear Response History Analysis
FEMA : Federal Emergency Management Agency
ATC : Applied Technology Council
ASCE : American Society of Civil Engineering

1. Introduction

Procédures d'analyse Pushover

Vecteurs chargement latéral

Simple (uniforme, triangulaire, ...)

Spectre de capacité, Coefficient de déplacement, N2, ...

1^{er} mode

Spectre de capacité, Coefficient de déplacement, N2, ...

Multi mode

Combinaison modale des réponses.

- ❖ Analyse Pushover multi-modes (Sasaki et al., 1996).
- ❖ Analyse pushover modale (Chopra et al., 2002).
- ❖ Analyse pushover modale modifiée (Chopra et al., 2004).
- ❖ Analyse pushover modale améliorée (Mao, J and Gunay MS., 2008).

Combinaison modale des chargements.

- ❖ Méthode de combinaison modale (Kalkan and Kunnath, 2004)
- ❖ Analyse pushover limite supérieure (Jan et al., 2004)
- ❖ Analyse pushover généralisée (Sucuogllu and Gunay, 2010)
- ❖ Analyse pushover limite supérieure améliorée (Rahmani et al., 2017)
- ❖ Extension de l'analyse pushover limite supérieure améliorée (Rahmani et al., 2022)

Pushover modale consécutive.

- ❖ Analyse pushover modale consécutive (Poursha et al., 2009)
- ❖ Analyse pushover modale consécutive modifiée (Khoshnoudian and Kiani, 2012)

Pushover modale adaptative.

- ❖ Procédure pushover adaptative (Antoniou et al., 2002)
- ❖ Analyse pushover multimode optimale (Attard and Fafitis, 2005)
- ❖ Analyse pushover modale adaptative (Kalkan and Kunnath, 2006)
- ❖ Analyse pushover limite supérieure adaptative (Rahmani et al., 2019)

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

Systeme
élastique?

L'équation de mouvement d'un SPDDL **élastique** est :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = -M \ddot{U}_g = -M \{\Delta\} \ddot{u}_g(t) = P_{eff}(t) \quad (24.1)$$

$\begin{matrix} nxn & nx1 & 1x1 & nx1 \end{matrix}$

La distribution spatiale de la force effective « $P_{eff}(t)$ », selon la hauteur, est donnée par :

$$s = M \{\Delta\} \quad (24.2)$$

$\begin{matrix} nx1 & nxn & nx1 \end{matrix}$

Idée de
l'expansion ?

$$P_{eff}(t) = -s \ddot{u}_g(t) \quad (24.3)$$

Posons

$$s = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r M \phi_r \quad (24.4)$$

$\begin{matrix} & & nxn & nx1 \end{matrix}$

M : Matrice masse

ϕ_r : Vecteur du mode propre
« r ».

Γ_r : Coefficient de participation
du mode « r »

Cette équation peut être vue comme une expansion de la distribution « s » des forces appliquées en termes de distribution de forces d'inertie « s_r » associées avec les modes naturels

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

$$s = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r M \phi_r \quad (24.4)$$

Multiplions de part et d'autre de l'équation (24.4) par ϕ_n^T ;

$$\phi_n^T s = \sum_{r=1}^N \Gamma_r \phi_n^T M \phi_r$$

Due à l'orthogonalité des vecteurs propres (valable uniquement dans le cas élastique), on aura :

$$\phi_n^T s = \Gamma_n \phi_n^T M \phi_n = \Gamma_n M_n \quad \longrightarrow \quad \Gamma_n = \frac{\phi_n^T s}{M_n} \quad (24.5)$$

Ainsi, la contribution du mode « n » dans le vecteur « s » sera:

$$s_n = \Gamma_n M \phi_n \quad (24.6)$$

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

Ainsi, l'expansion modale de la charge sismique effective

$$P_{eff}(t) = -M \{\Delta\} \ddot{u}_g(t) = -s \ddot{u}_g(t)$$

Cette distribution de force peut être étendue comme sommation des distributions des forces d'inertie :

$$s = M \{\Delta\} = \sum_{n=1}^N s_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n M \phi_n$$

Avec :

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T s}{M_n} = \frac{\phi_n^T M \{\Delta\}}{M_n} = \frac{L_n}{M_n} \quad (24.7)$$

Sachant que :

$$L_n = \phi_n^T M \{\Delta\}$$

et

$$M_n = \phi_n^T M \phi_n \quad (24.8)$$

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

Ainsi, l'expansion modale de la charge sismique effective

$$P_{eff}(t) = \sum_{n=1}^N P_{eff,n}(t) = \sum_{n=1}^N -s_n \ddot{u}_g(t) \quad (24.9)$$

Ainsi, la contribution du mode « n » dans le vecteur charge effective « $P_{eff}(t)$ » sera:

$$P_{eff,n}(t) = -s_n \ddot{u}_g(t) \quad (24.10)$$

Avec :

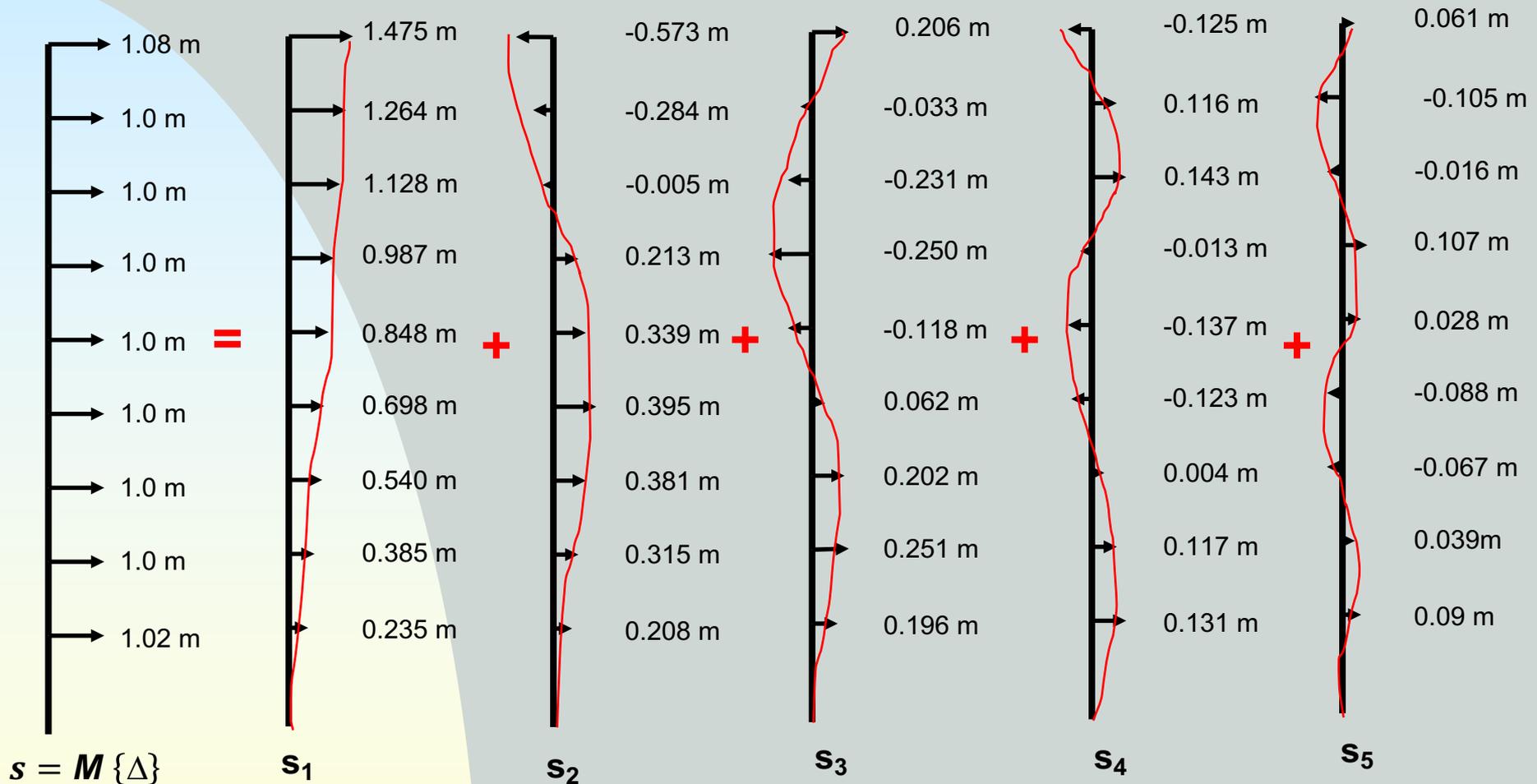
$$s_n = \Gamma_n M \phi_n$$

Ainsi, dans ce cas (élastique)

La réponse du SPDDL due à la force « $P_{eff,n}(t)$ » est entièrement dans le mode « n », aucune contribution des autres modes.

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

Exemple d'expansion modale de la charge sismique effective



Expansion modale de la distribution « $s = M \{\Delta\}$ » de la charge sismique effective

N.B: Prendre avec son signe algébrique

2. Expansion modale des forces sismiques effectives

Ainsi, avec cette idée d'expansion modale « $P_{eff}(t)$ » et de « s »

02 procédures sont proposées pour
approcher les systèmes
inélastiques (Chopra et Goel (2002))

Uncoupled modal response history analysis (UMRHA).

Analyse temporelle des réponses modales non couplées

- ❖ Pas pratique. Développée uniquement pour justifier la procédure MPA.
- ❖ La réponse du système à la composante de force « $P_{eff,n}(t)$ » (du mode « n ») est déterminée par une analyse temporelle non linéaire d'un S1DDL inélastique.
- ❖ La réponse totale (due à tous les modes) est la superposition de toutes les réponses modales obtenues individuellement.

Modal pushover analysis (MPA)

Analyse pushover modale

- ❖ La réponse maximale à la composante de force « $P_{eff,n}(t)$ » (du mode « n ») est déterminée par une analyse statique ou analyse Pushover.
- ❖ La réponse totale (due à tous les modes) est la combinaison (SRSS, CQC,...) de toutes les réponses modales maximales.

**Rappel (Voir
chapitre 12)**

Bâtiments à étages multiples élastiques

3. Analyse temporelle des réponses modales non couplées (UMRHA) pour les bâtiments à étages multiples élastiques

Ainsi, l'équation du SPDDL **élastique** d'un seul mode « n » sera :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = -s_n \ddot{u}_g(t) = P_{eff, n}(t) \quad (24.11)$$

Et les déplacements (au niveau des étages), utilisant l'idée de l'expansion modale de l'analyse modale, seront :

$$u_n(t) = \phi_n y_n(t) \quad (24.12)$$

En remplaçant dans (24.11), on aura:

$$M \ddot{u}_n + C \dot{u}_n + K u_n = -s_n \ddot{u}_g(t)$$

$$M \phi_n \ddot{y}_n + C \phi_n \dot{y}_n + K \phi_n y_n = -s_n \ddot{u}_g(t)$$

$$M \phi_n \ddot{y}_n + C \phi_n \dot{y}_n + K \phi_n y_n = -s_n \ddot{u}_g(t)$$

En prémultipliant par ϕ_n^T , on aura

$$\phi_n^T M \phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \phi_n \dot{y}_n + \phi_n^T K \phi_n y_n = -s_n \phi_n^T \ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24.13)$$

ω_n : Pulsation propre du mode « n »
 ξ_n : Coefficient d'amortissement du mode « n »
 Γ_n : Coefficient de participation du mode « n »

Avec

$$\begin{aligned} M_n &= \phi_n^T M \phi_n & \frac{K_n}{M_n} &= \omega_n^2 \\ C_n &= \phi_n^T C \phi_n \\ K_n &= \phi_n^T K \phi_n \\ \Gamma_n &= \frac{L_n}{M_n} = \frac{\phi_n^T M \{\Delta\}}{M_n} & \frac{C_n}{M_n} &= 2\xi_n \omega_n \end{aligned}$$

En posant :

$$y_n(t) = \Gamma_n q_n(t) \quad (24.14)$$

Où $q_n(t)$ est la réponse du mode « n » S1DDL linéaire élastique dont l'équation du mouvement est :

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\ddot{u}_g(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24.15)$$

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\ddot{u}_g(t) \quad (24.15)$$

- L'équation (24.15) est un système d'équations linéaires découplées. Chaque terme de cette équation représente S1DDL.
- On peut donc utiliser n'importe quelle méthode pour calculer la réponse de chaque DDL. Soit la méthode de l'intégrale de Duhamel:

Soit, par exemple pour des CI nulles et système amorti

$$y_j(t) = -\frac{\Gamma_j}{m_j \omega_{aj}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi \omega_j(t-\tau)} \sin(\omega_{aj}(t-\tau)) d\tau$$

Les déplacements finaux aux différentes étages seront alors (24.14) dans (24.12) :

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n \mathbf{y}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n \Gamma_n \mathbf{q}_n(t) \quad (24.16)$$

On peut définir l'inter étage (Drift) déplacement (Différence de déplacements de 02 étages consécutives)

$$\Delta_{jn}(t) = \Gamma_n (\boldsymbol{\phi}_{jn} - \boldsymbol{\phi}_{j-1,n}) \mathbf{q}_n(t)$$

La réponse totale (Déplacement, effort tranchant à la base, moment de renversement,...) sera la superposition de toutes les réponses modales (pour chaque valeur de « n »)

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n(t) \quad (24.17)$$

Ainsi

**Pour les systèmes
élastiques linéaires**

UMRHA



**Superposition
Modale**

Sauf que les équations sont obtenues par utilisation de l'expansion modale de la distribution spatiale des forces sismiques effectives

Nouveau

**Bâtiments à étages
multiples
inélastiques**

4. Analyse temporelle des réponses modales non couplées (UMRHA) pour les bâtiments à étages multiples inélastiques

- ✓ La méthode de superposition modale n'est pas applicable pour un système non linéaire (inélastique).
- ✓ Mais, les réponses dynamiques inélastiques peuvent être discutées en termes de modes de vibration naturels du **système linéaire correspondant**.
- ✓ Chaque élément structurel du système linéaire correspondant présente la même rigidité que sa rigidité initiale dans le système inélastique.
- ✓ Les 02 systèmes ont la même masse et le même amortissement.
- ✓ Donc, les périodes et modes propres de vibration du système linéaire correspondant sont les mêmes que les propriétés de vibration du système inélastique subissant de **petites oscillations** (Dans la plage linéaire).

Ainsi

L'idée de l'expansion modale des forces sismiques effectives reste valide pour les systèmes inélastiques, où « ϕ_n » représente les modes du système linéaire correspondant

Ainsi, l'équation du SPDDL **inélastique** sera :

(24.18)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{U}, \text{signe } \dot{\mathbf{U}}) = -\mathbf{M} \{\Delta\} \ddot{u}_g(t) = -\mathbf{s} \ddot{u}_g(t) = P_{eff}(t)$$

Pour le mode « n » cette équation devient

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{U}, \text{signe } \dot{\mathbf{U}}) = -\mathbf{s}_n \ddot{u}_g(t) = P_{eff,n}(t) \quad (24.19)$$

Puisque par expansion modale :

$$\mathbf{s} = \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \quad \mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$$

$$P_{eff}(t) = \sum_{n=1}^N P_{eff,n}(t) = \sum_{n=1}^N -\mathbf{s}_n \ddot{u}_g(t)$$

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + f_s(U, \text{signe } \dot{U}) = -s_n \ddot{u}_g(t) = P_{eff, n}(t) \quad (24.19)$$

Dans cette équation, d'autres modes que le mode « n » vont contribuer dans la réponse du système.

Dans ce cas, on ne peut pas découpler les équations en utilisant $u_n(t) = \phi_n y_n(t)$

Les modes de vibration sont couplés

Mais, on va utiliser le principe, pour transformer l'équation (24.19) aux coordonnées modales du système linéaire correspondant

Par expansion modale, on peut écrire les déplacements des étages :

$$u_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n y_n(t) \quad (24.20)$$

$$\mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{y}_n(t) \quad (24.20)$$

Pour les systèmes **linéaires** ($\mathbf{u}_n(t) = \phi_n \mathbf{y}_n(t)$), tous les « $\mathbf{y}_r(t)$ » avec $r \neq n$, sont négligés. On, suppose que le mode « n » est dominant.

Hypothèse qui reste valable pour les systèmes inélastiques, on peut toujours supposer que le mode « n » est dominant.

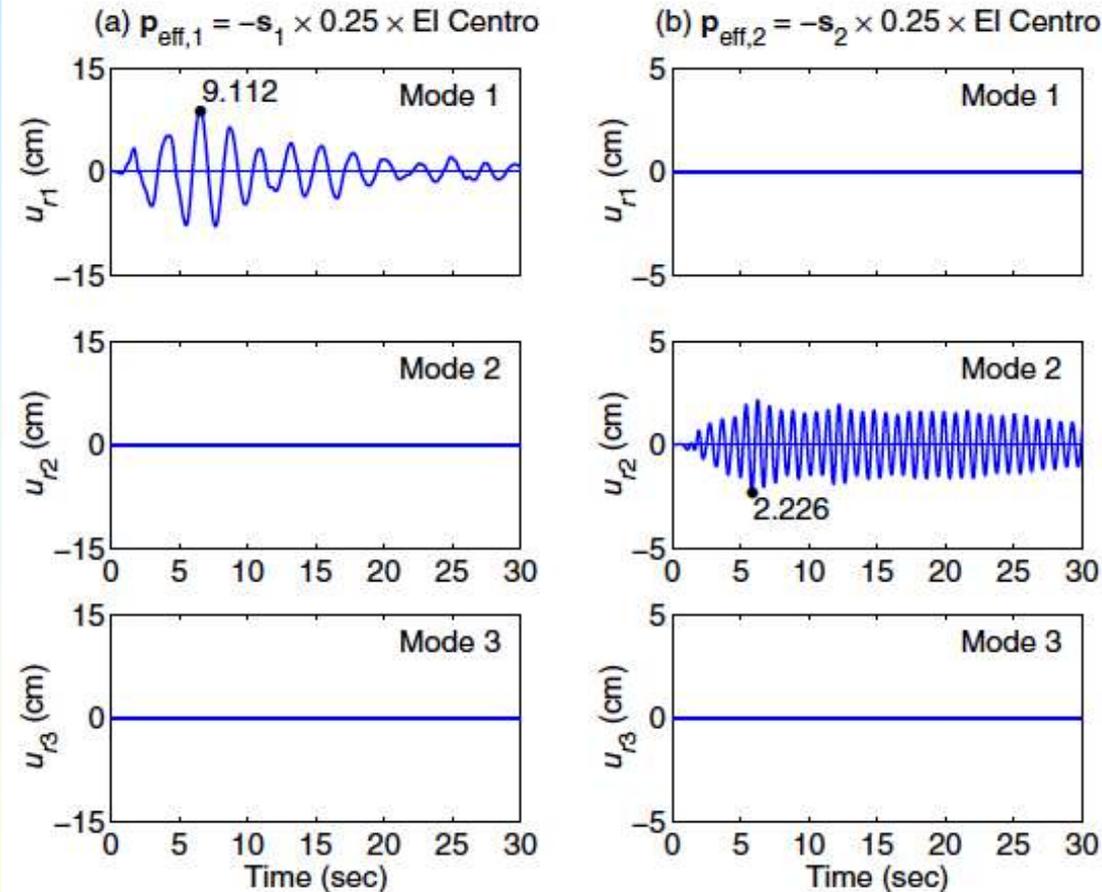
Les modes de vibration sont **faiblement** couplés

D'où

$$\mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{y}_n(t) \simeq \phi_n \mathbf{y}_n(t) \quad (24.21)$$

Un exemple a été traité par Chopra et Goel, montrant cette hypothèse ?

Excitation : 0.25 accélération El Centro



Du à un séisme « faible » (0.25 El centro), la structure ne cède pas encore.

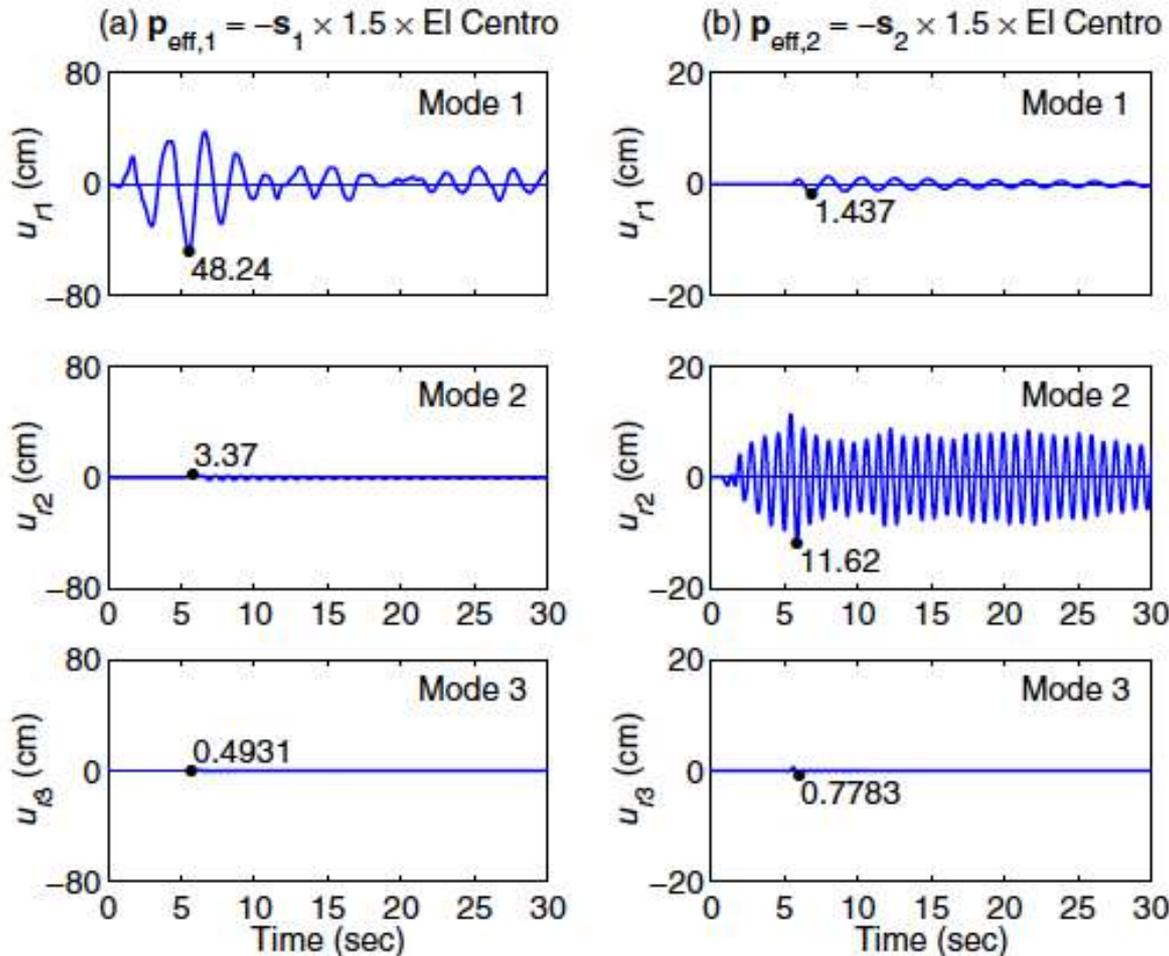
On note que la réponse du système due à l'excitation « $\mathbf{P}_{\text{eff},n}(t)$ » ($n=1,2$) est totalement dans le mode « n » (mode dominant)

Décomposition modale du déplacement de la toiture due à:

(a) : $\mathbf{P}_{\text{eff},1}(t) = -\mathbf{s}_1 \times 0.25$ accélération El Centro

(b) : $\mathbf{P}_{\text{eff},2}(t) = -\mathbf{s}_2 \times 0.25$ accélération El Centro

Excitation : 1.50 accélération El Centro



Du à un séisme « fort » (1.50 El centro), la structure a cédé. D'autres modes contribuent à la réponse.

Mais !!!

Pour $P_{\text{eff},1}$, le 2^{ème} et 3^{ème} modes commencent à réagir à 5.2 s (le 1^{er} instant la structure commence à céder) avec des contributions de 7% et 1% respectivement de la réponse du 1^{er} mode (Faibles)

Pour $P_{\text{eff},2}$, le 1^{er} et 3^{ème} modes commencent à réagir à 5.2 s (le 1^{er} instant la structure commence à céder) avec des contributions de 12% et 7% respectivement de la réponse du 2^{ème} mode (Faibles)

Décomposition modale du déplacement de la toiture due à :

(a) : $P_{\text{eff},1}(t) = -s_1 \times 1.50$ accélération El Centro

(b) : $P_{\text{eff},2}(t) = -s_2 \times 1.50$ accélération El Centro

Ainsi, avec :

$$\mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n \mathbf{y}_n(t) \simeq \boldsymbol{\phi}_n \mathbf{y}_n(t)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_{sn} = -s_n \ddot{u}_g(t)$$

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \ddot{\mathbf{y}}_n + \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_n \dot{\mathbf{y}}_n + \mathbf{F}_{sn} = -s_n \ddot{u}_g(t)$$

En prémultipliant par $\boldsymbol{\phi}_n^T$, on aura

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \ddot{\mathbf{y}}_n + \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_n \dot{\mathbf{y}}_n + \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{F}_{sn} = -s_n \boldsymbol{\phi}_n^T \ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \frac{F_{sn}}{M_n} = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24.22)$$

Avec : $F_{sn} = F_{sn}(y_n, \text{signe } \dot{y}_n) = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{f}_s(u_n, \text{signe } \dot{u}_n) \simeq \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{f}_s(y_n, \text{signe } \dot{y}_n)$ (24.23)

Si on n'a pas négligé les petites contributions des autres modes, « F_{sn} » dépendra de toutes les coordonnées modales et les équations seront couplées due à la rupture de la structure.

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \frac{F_{sn}}{M_n} = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (24.22)$$

En posant :

$$y_n(t) = \Gamma_n q_n(t)$$

Où $q_n(t)$ est la réponse du mode « n » **S1DDL nonlinéaire inélastique** dont l'équation du mouvement est :

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{L_n} = -\ddot{u}_g(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24.24)$$

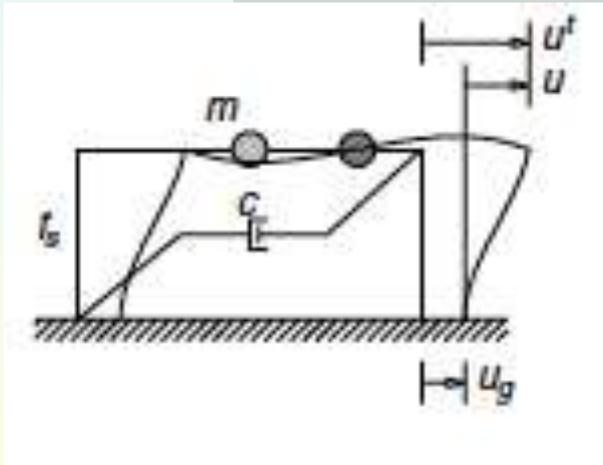
Avec : $F_{sn} = F_{sn}(q_n, \text{signe } \dot{q}_n) = \phi_n^T f_s(q_n, \text{signe } \dot{q}_n)$ (24.25)

Ce S1DDL inélastique est défini par :

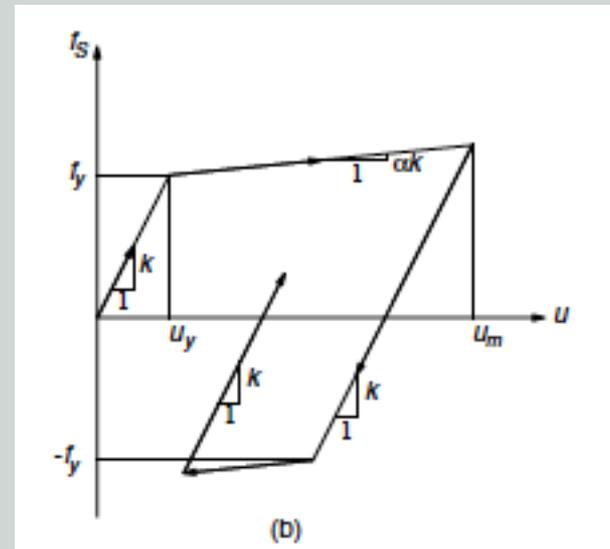
- Propriétés de vibration (ω_n (aussi T_n) et ξ_n du mode « n » du SPDDL) pour **petites oscillations**.
- Masse unité.
- La relation force-déplacement ($F_{sn}/L_n - q_n$) définie par l'équation (24.25)

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{L_n} = -\ddot{u}_g(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24.24)$$

- L'équation (24.24) est un système d'équations linéaires découplées. Chaque terme de cette équation représente **S1DDL inélastique**.
- On peut donc utiliser n'importe quelle méthode (ou logiciel) pour calculer la réponse « $q_n(t)$ » de chaque DDL.



S1DDL (inélastique)



Relation force-déplacement hystérétique bi-linéaire

Ayant obtenu « $q_n(t)$ » :

Les déplacements finaux aux différentes étages seront alors (24.14) dans (24.12) :

$$u_n(t) = \phi_n y_n(t) = \phi_n \Gamma_n q_n(t) \quad (24.26)$$

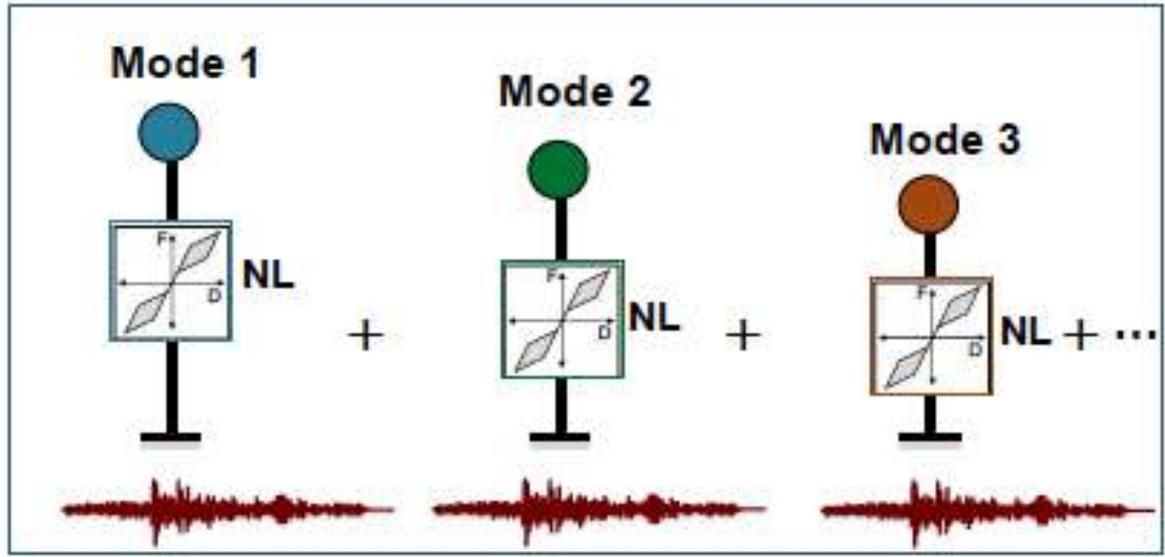
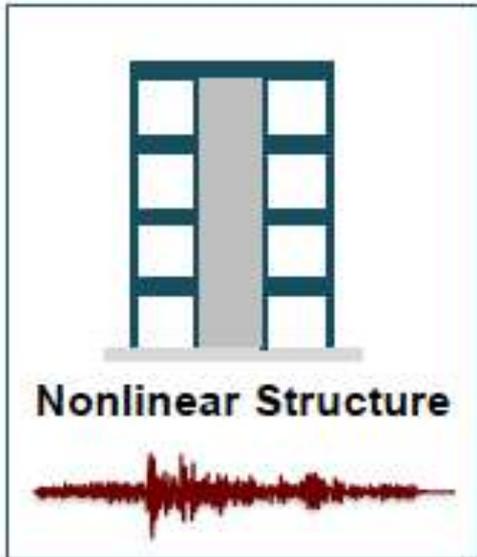
On peut définir l'inter étage (Drift) déplacement (Différence de déplacements de 02 étages consécutives)

$$\Delta_{jn}(t) = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) q_n(t) \quad (24.27)$$

La réponse totale (Déplacement, effort tranchant à la base, moment de renversement,...) sera la superposition de toutes les réponses modales (pour chaque valeur de « n »)

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) \quad (24.28)$$

Résumé de la méthode UMRHA



Analyse temporelle non linéaire

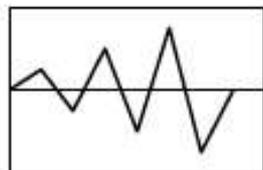
Analyse temporelle modale non couplée



Résumé de la méthode UMRHA

Pour chaque mode

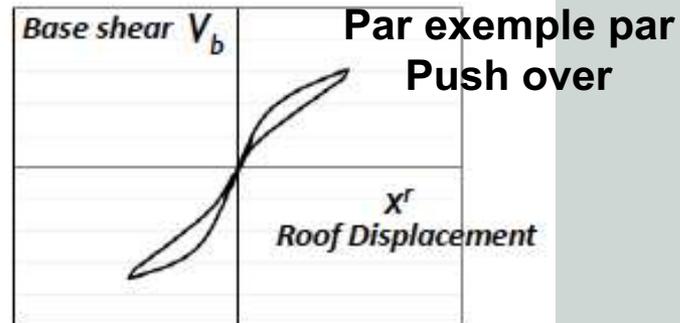
Pour chaque mode



Chargement cyclique

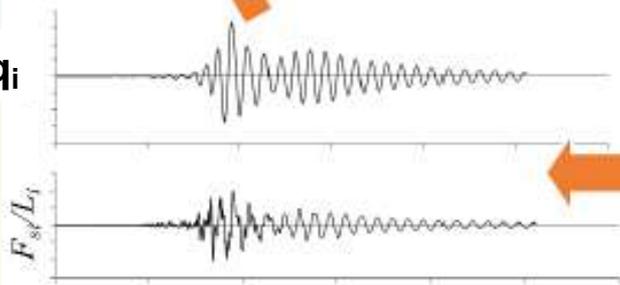


MDOF



Displacement-related responses

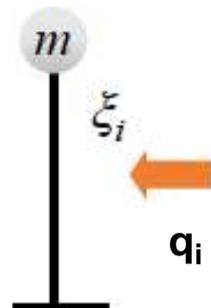
q_i



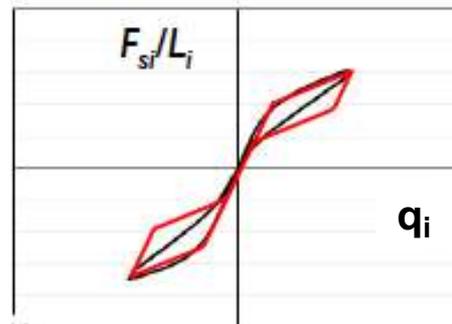
Time (Sec)

Force-related responses

SDOF



q_i

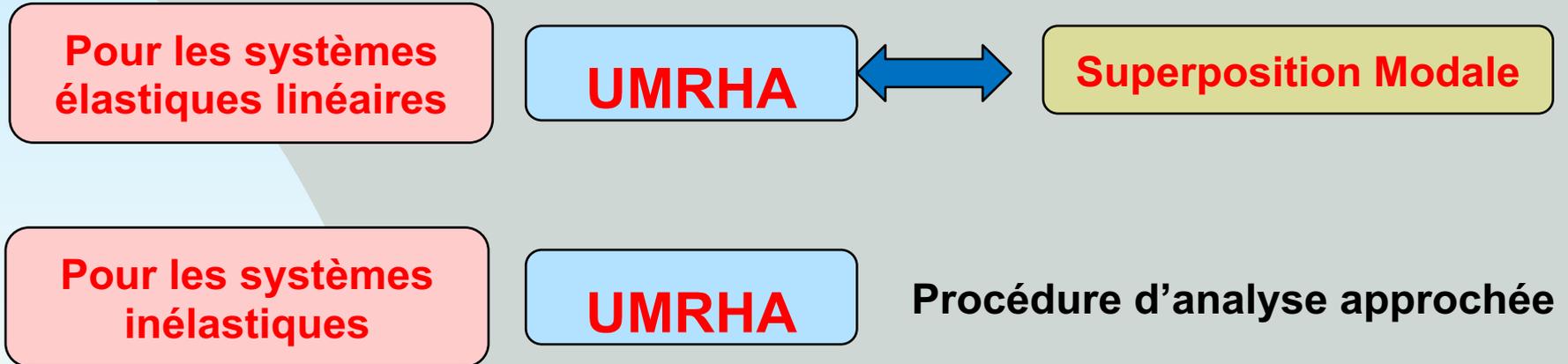


$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \frac{F_{sn}}{L_n}q_n = -\ddot{u}_g(t)$$

Acceleration G



Ainsi, en résumé



UMRHA basée sur 02 approximations :

1. Superposition des réponses (valide pour les systèmes élastiques et approximativement valide pour les systèmes inélastiques).
2. Néglige le couplage des coordonnées modales, qui permet de calculer la réponse d'un SPDDL inélastique due à $P_{\text{eff},n}(t)$, du mode « n ».

Merci. Fin du chapitre 24

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 25

L'analyse push over modale et ses variantes