

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

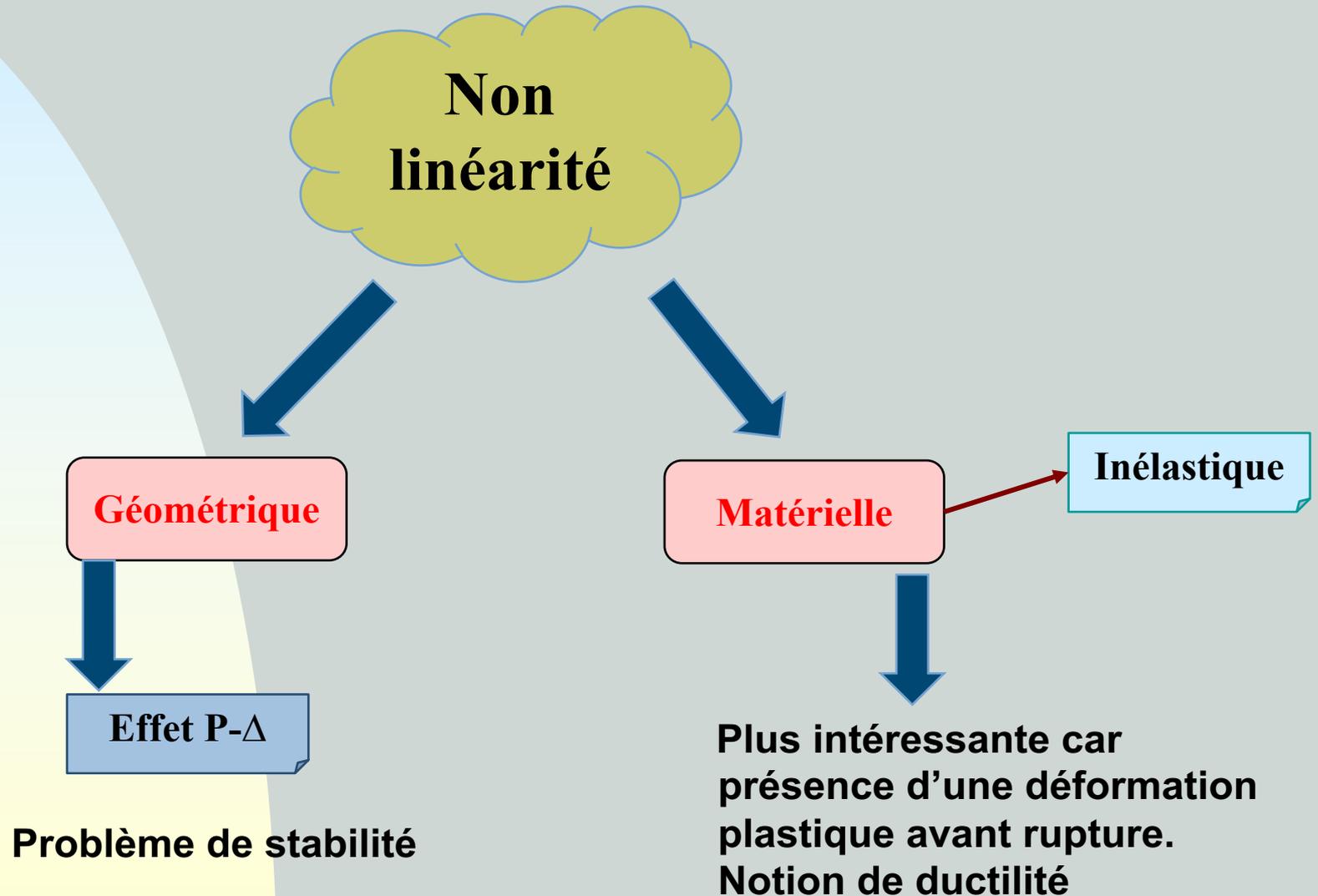
e-mail: [abdellatif\\_megnounif@yahoo.fr](mailto:abdellatif_megnounif@yahoo.fr)

## **Chap. 15**

# **Analyse dynamique non linéaire** **Notion de facteur de comportement**

# 1. Introduction

## Notion de non linéarité ?



**Non linéarité**

- **Matérielle**
- Géométrique

Séismes majeurs : accélérations produites sur les constructions de l'ordre de 0,3 g à 0,8 g.

Les accélérations imposées par les règlements : 0,1 g à 0,3 g.

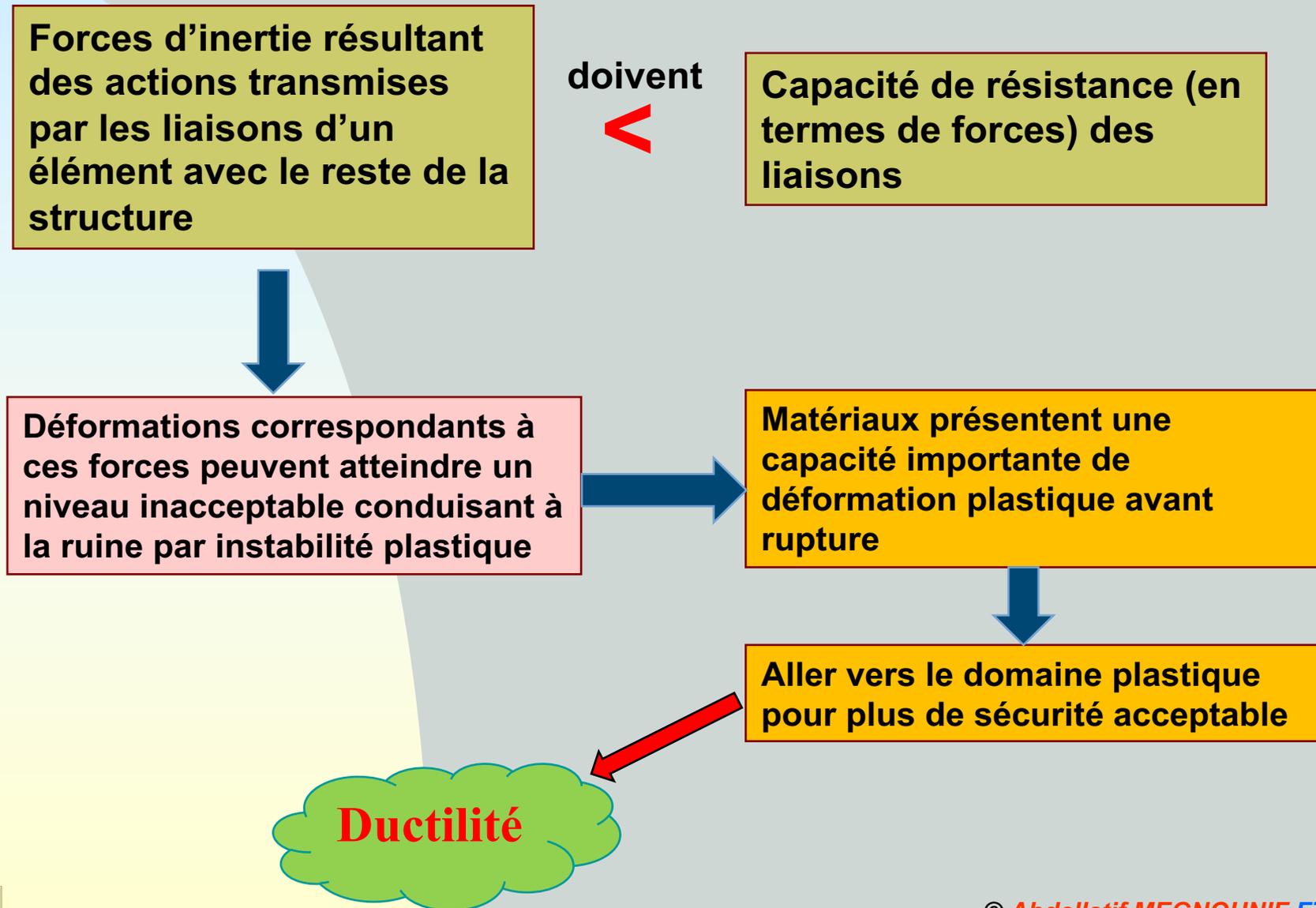
## Pourquoi les constructions résistent-elles?



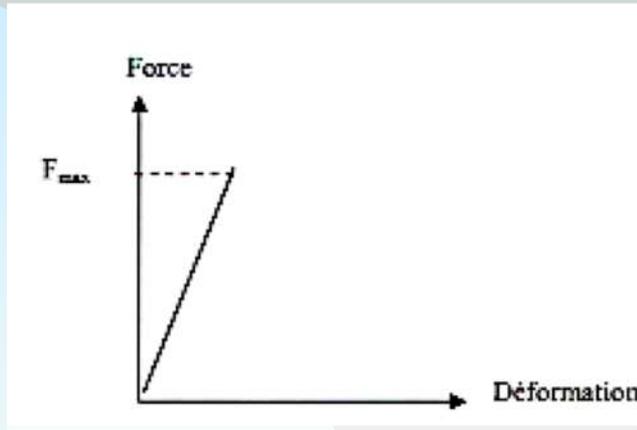
Les sollicitations sismiques sont de type déformation imposée.

Le mode de ruine est associé à une limite de déformation et non pas à une limite de résistance qui détermine la sécurité des constructions.

## Comportement inélastique (non linéaire matériel)

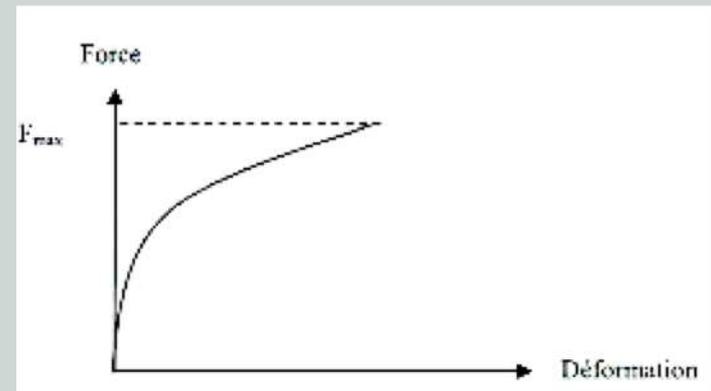


## Comportement inélastique (non linéaire matériel)



**Fragile**

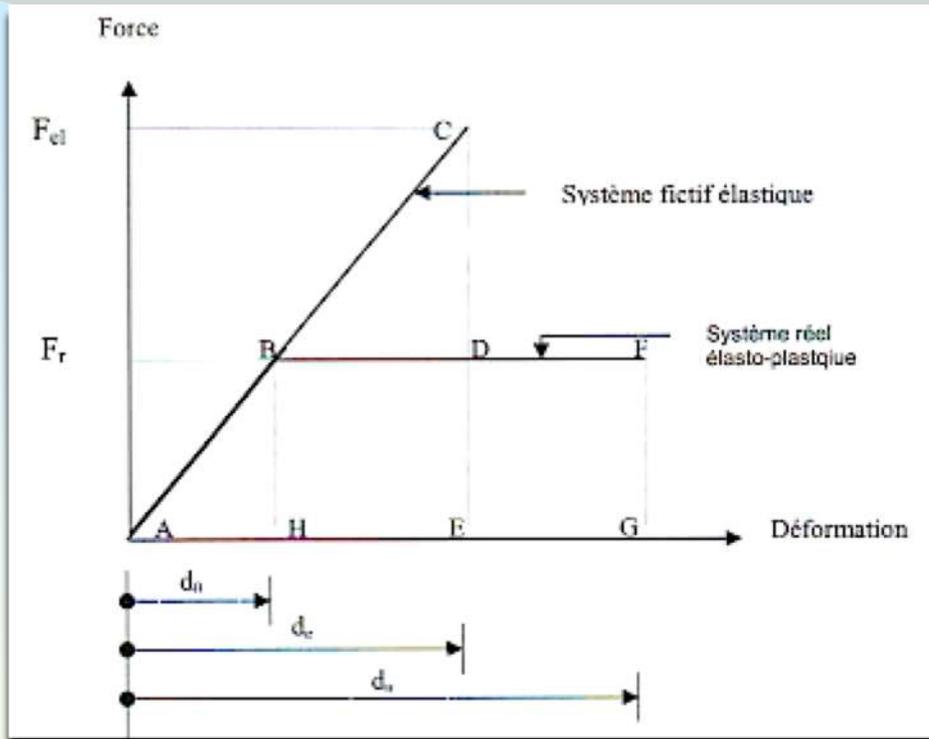
**La ruine est brusque quand la structure atteint sa résistance maximale**



**Ductile**

**Présente un palier de sécurité supplémentaire au-delà de sa limite élastique**

## Comportement inélastique (non linéaire matériel)



Equivalence des diagrammes élastiques et élasto-plastique

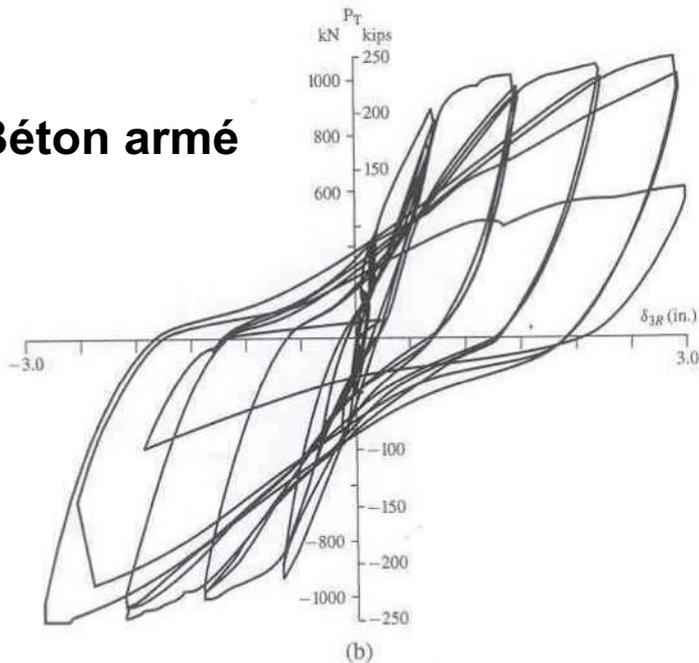
Sous un séisme majeur : pas obligé d'exiger une résistance maximale sous  $F_{el}$  mais une résistance considérable plus faible «  $F_r$  » avec une ductilité suffisante.

Déplacements dus aux séismes dépassent la limite linéaire et le système répond avec des forces «  $F_r$  » < à  $F_{el}$

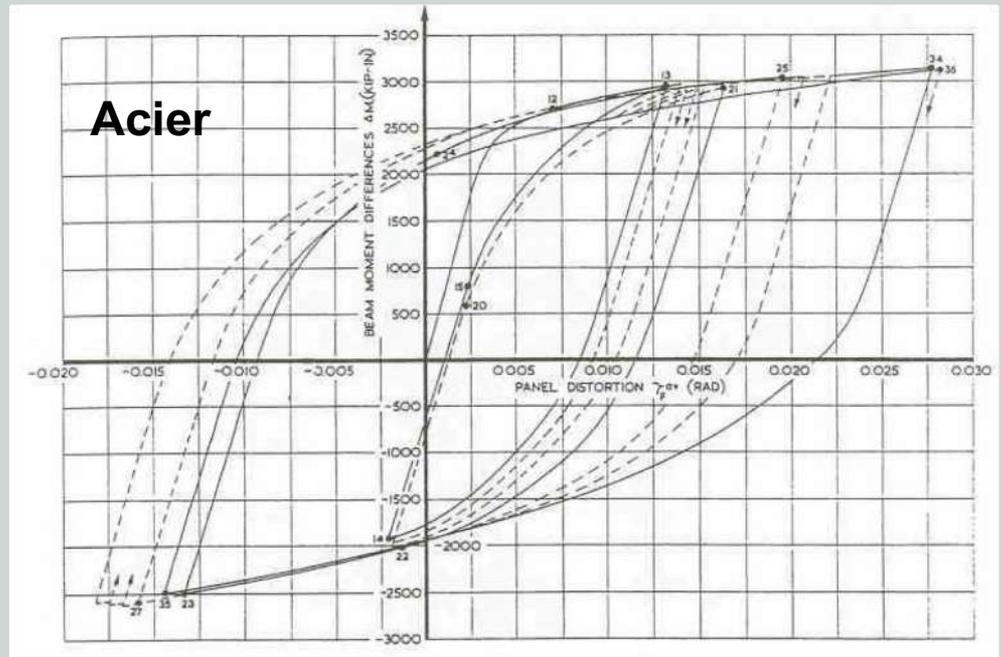
Le système ne peut pas développer plus que «  $F_r$  » et continue sa déformation plastique sans atteindre la ruine (pour un palier important)

# Exemples de non linéarité de comportement

## Béton armé



## Acier

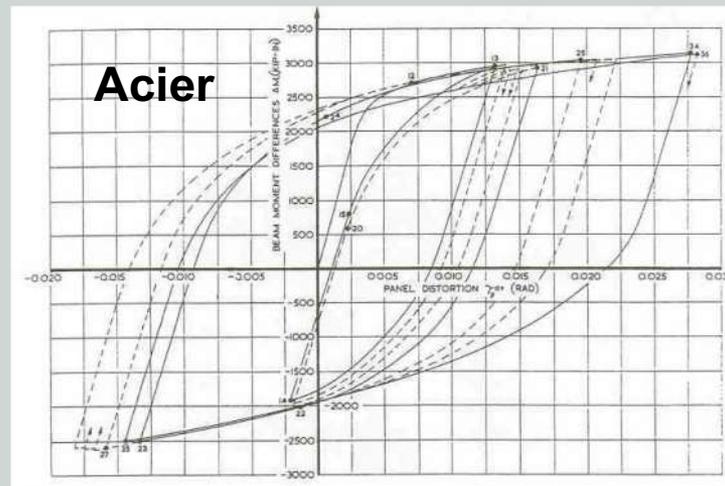


Au début du chargement, pour les faibles amplitudes de déplacement, le comportement est linéaire.

Au-delà d'un certain seuil de déplacement, comportement non linéaire qui se traduit par des limitations de l'effort maximal appliqué.

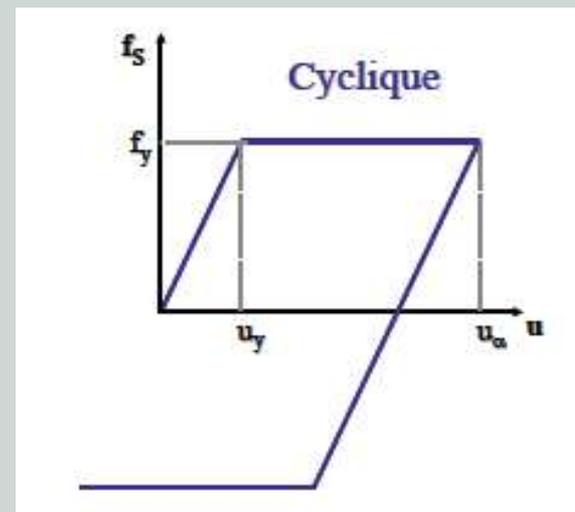
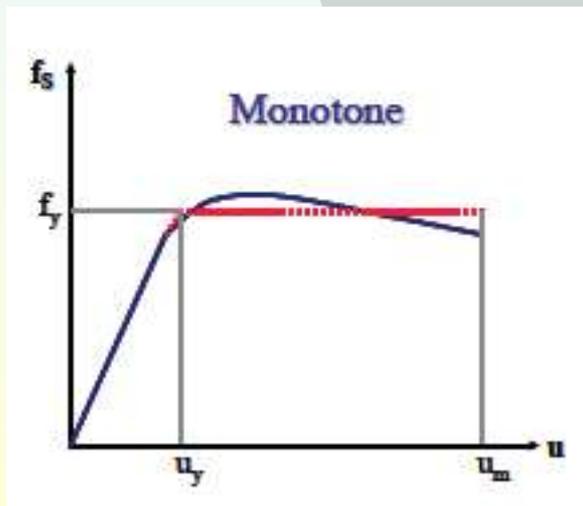
Lors des cycles charge-décharge, apparition d'hystérésis traduisant une dissipation d'énergie.

# Modélisation simplifiée du comportement non linéaire



Courbe effort déformation

Comportement élastique  
parfaitement plastique



Schématisation du comportement non linéaire

## 2. Equation du mouvement. Méthodes de résolution

$$f_I(t) + f_a(t) + f_k(t) = P(t) \quad (15.1)$$

Cas des systèmes  
linéaires



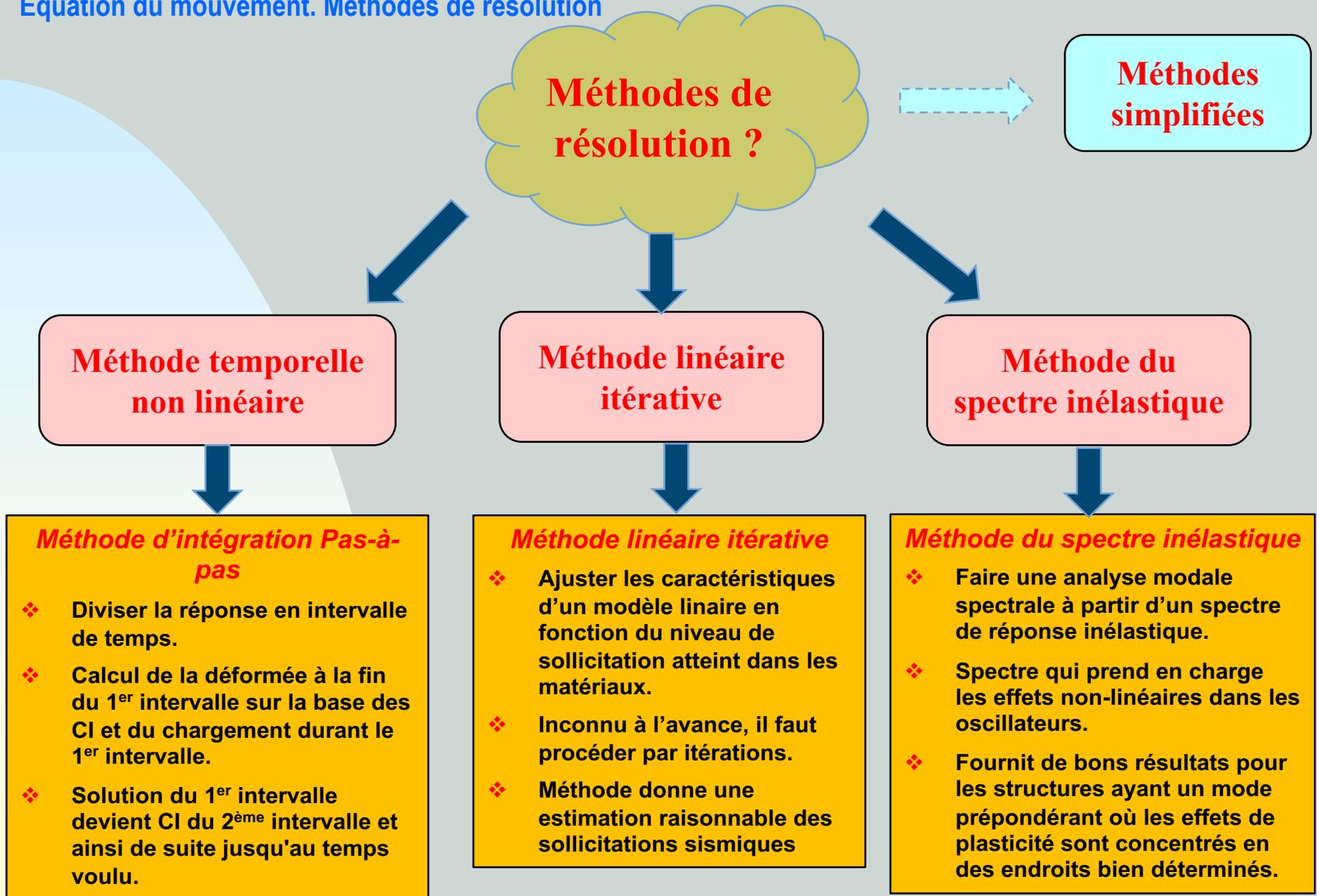
Masse constante  
Force d'amortissement  
linéaire visqueux  
Force de rappel élastique

Cas des systèmes  
non linéaires



Force d'amortissement non  
linéaire  
Force de rappel inélastique

Méthodes de  
résolution ?



Méthode pas-à-pas

(§ Chapitre 11)

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta P(t) \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{U}_i &= \ddot{U}(t_i + \tau) - \ddot{U}(t_i) \\ \Delta \dot{U}_i &= \dot{U}(t_i + \tau) - \dot{U}(t_i) \\ \Delta U_i &= U(t_i + \tau) - U(t_i) \\ \Delta P_i &= P(t_i + \tau) - P(t_i) \end{aligned} \quad (15.3)$$

En cas de non linéarité.

- $K(U)$  et  $C(\dot{U})$  dans le temps (d'un intervalle à un autre) et sont obtenus pour chaque intervalle de temps, les tangentes au début de l'intervalle.
- $M$  est supposée rester constante dans le temps

**Méthodes simplifiées**

**Base-performance design (BPD)**

**Méthode statique équivalente**

**Méthode statique linéaire**

**Procédures basées sur la méthode push over**

**Méthode statique non linéaire**

**Méthode statique équivalente**

- Méthode approchée.
- Méthode statique équivalente linéaire.
- Permet l'estimation de l'effort tranchant à la base.
- Très pratique pour les codes de conception parasismique.

**Méthode Push over**

- Méthode approchée.
- Méthode statique équivalente non linéaire.
- Permet l'estimation de la performance sismique inélastique.
- Très pratique pour les codes de réhabilitation.
- Permet le suivi des séquences de formation des rotules plastiques et de l'apparition de la ruine dans les différents éléments de la structure.
- Courbe de capacité.

**Facteur de comportement « R »**

**Différentes procédures, basées sur Pushover.**

- ✓ Le spectre de capacité
- ✓ Le calcul des coefficients de déplacement
- ✓ Méthode N2...



### 3. Concept d'absorption d'énergie par déformation plastique

#### *Notion de Ductilité*

Energie communiquée par un séisme est absorbée par une énergie de déformation (**K**), une énergie cinétique (**M**) et une énergie d'amortissement (**C**).

Equilibre énergétique ?

$$E_I - E_S = E_E + E_D \quad (15.4)$$

Energie induite  
(injectée dans la  
structure)

Energie restituée  
au sol (interaction  
sol-structure)

Energie  
accumulée dans la  
structure dans le  
domaine élastique

Energie dissipée  
dans la structure  
dans le domaine  
inélastique

$$E_I - E_S = E_C + E_{DE} + E_A + E_H \quad (15.5)$$

Energie  
cinétique

Energie de  
déformation  
élastique  
correspondant à la  
partie réversible  
des déformations

Energie  
d'amortissement  
dissipée en  
chaleur

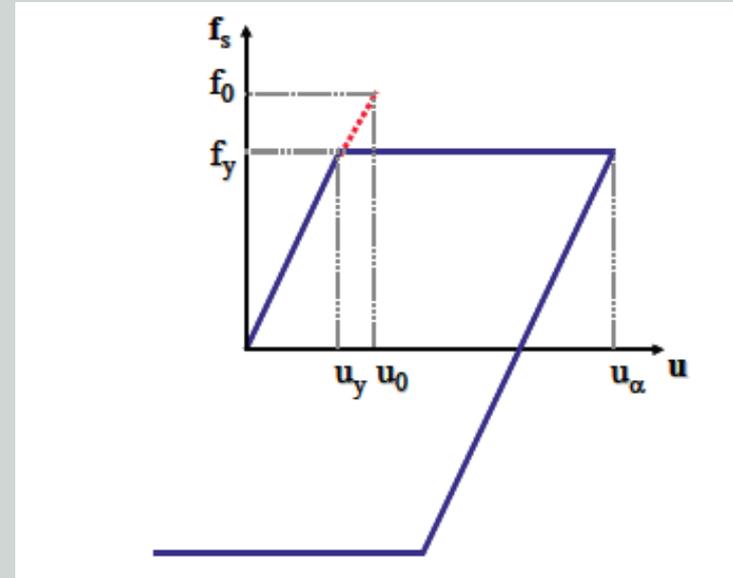
Energie  
hystérétique

## Importance du palier plastique ?

$f_0$ : effort maximal si le matériau possède une résistance infinie

$f_y$  : limite d'élasticité

$f_0$ : apparait comme étant la résistance minimale que doit posséder le système pour rester élastique lors du chargement considéré

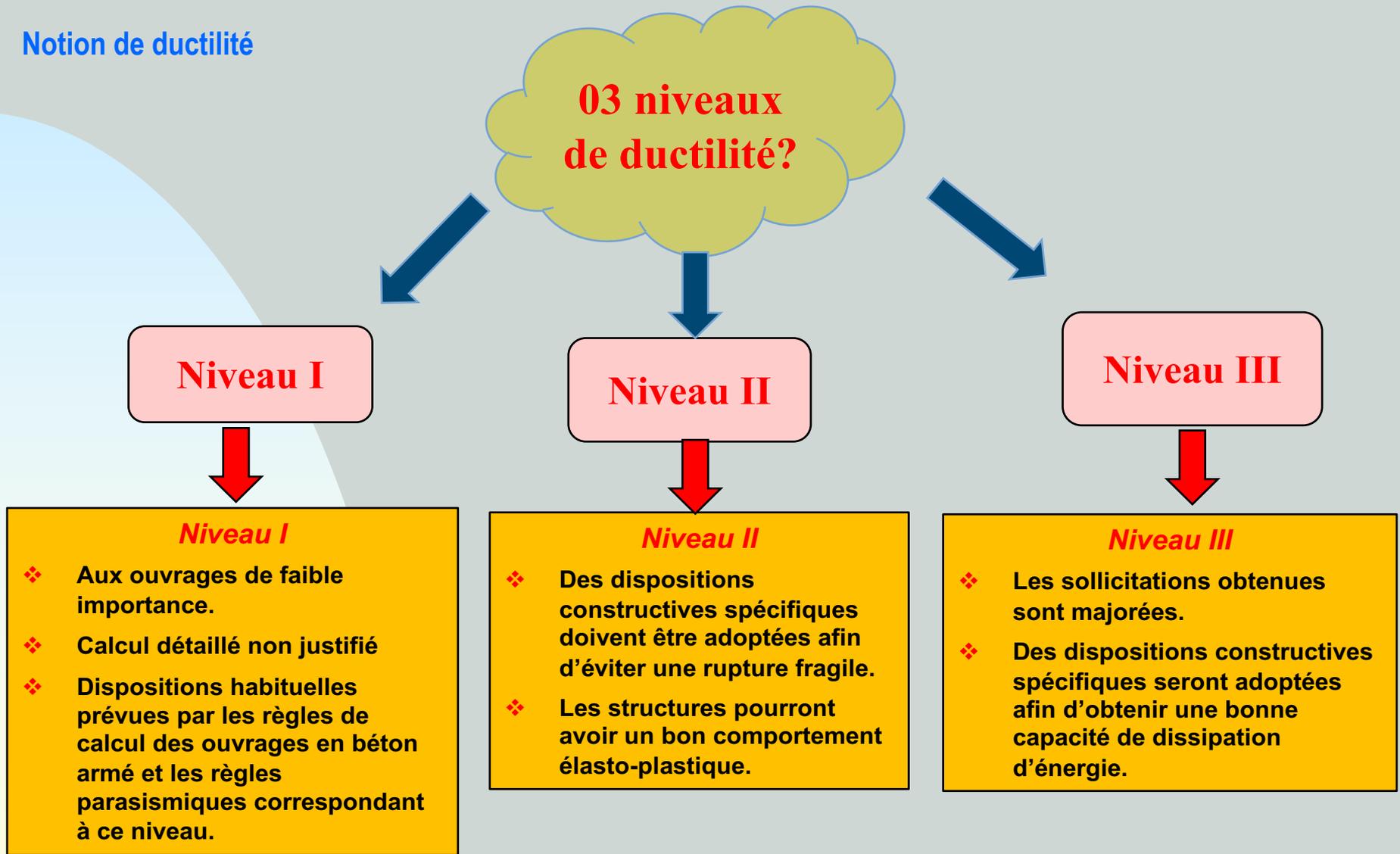


L'énergie maximale (L'aire sous la courbe) pouvant être absorbée de façon permanente par le système dépend de la longueur maximale du palier de plasticité, i.e sa capacité au-delà de la limite élastique. C'est la **Ductilité**.

$$\text{Ductilité } \mu = \frac{\text{Déformation maximale atteinte}}{\text{déformation maximale élastique}}$$

$$\mu = \frac{u_\alpha}{u_y}$$

(15.6)



**Finalemment**

**Plus élevé sera le niveau de ductilité conféré à une structure, plus réduit sera le niveau d'action sismique à prendre en compte dans les calculs**

**Intérêt de la ductilité ?**

A travers un exemple ?

Considérons 02 consoles (1) et (2) qui travaillent en flexion avec des contraintes internes égales.

(1) A un comportement purement élastique ( $M_1$ : élastique)

(2) Capable de déformations plastiques avec une ductilité = 2 ( $M_2$ : moment plastique)

Pour que les 02 consoles, absorbent la même énergie, il faut que

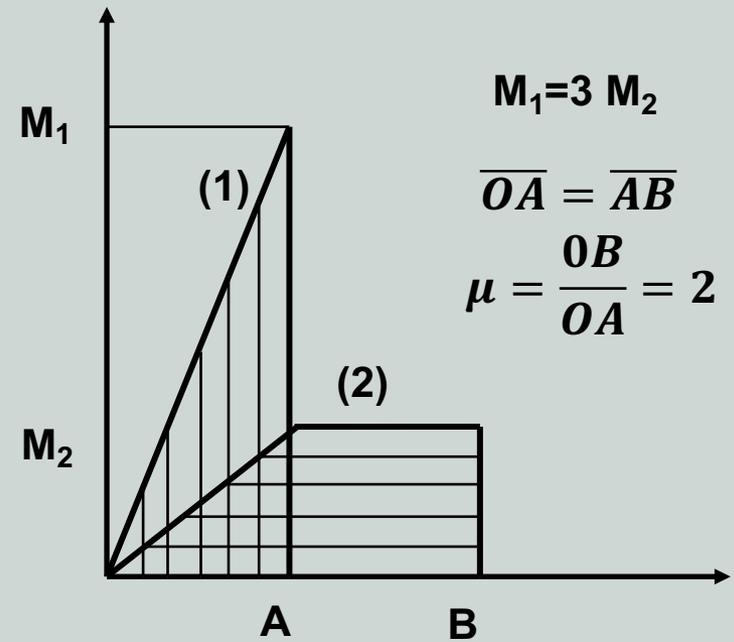
$$M_1 = 3 M_2$$

Le rapport entre leurs moment d'inertie doit être:

$$\frac{I_1}{I_2} = 3$$

Supposons des poutres de section carrée, on aura un rapport de section :

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{3} = 1,73$$



**Conclusion**

Quand on implique le comportement plastique, on arrive à absorber la même énergie en optant pour des sections beaucoup moins importantes.

## *Ductilité ?*

### **La ductilité est directement liée :**

- ✓ **A la nature et à la qualité des matériaux (Béton armé, acier, maçonnerie...)**
- ✓ **Au comportement des éléments composant la structure. On peut observer des pertes des résistances rapides dans des éléments constitués d'un matériau convenable, lorsqu'on les soumet à des déformations croissantes. Exemple: l'instabilité totale (flambement, déversement), le voilement, la rupture fragile et le comportement semi-rigide des assemblages.**
- ✓ **Au degré d'hyperstaticité. La chance de la structure à résister à un séisme majeur augmente en augmentant le nombre d'hyperstaticité.**
- ✓ **Au respect des règles de l'art de la construction en général et au respect de certaines règles de conception propres au projet antisismique.**

## 4. Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire

### *Notion du facteur de comportement*

Utilisé pour prendre en compte le comportement non linéaire réel d'une structure.

Généralement, c'est une valeur **forfaitaire** unique pour un même type de contreventement quel que soit la zone sismique, l'intensité des charges verticales, etc....

**Plus complexe que ceci, dépendant de plusieurs paramètres**

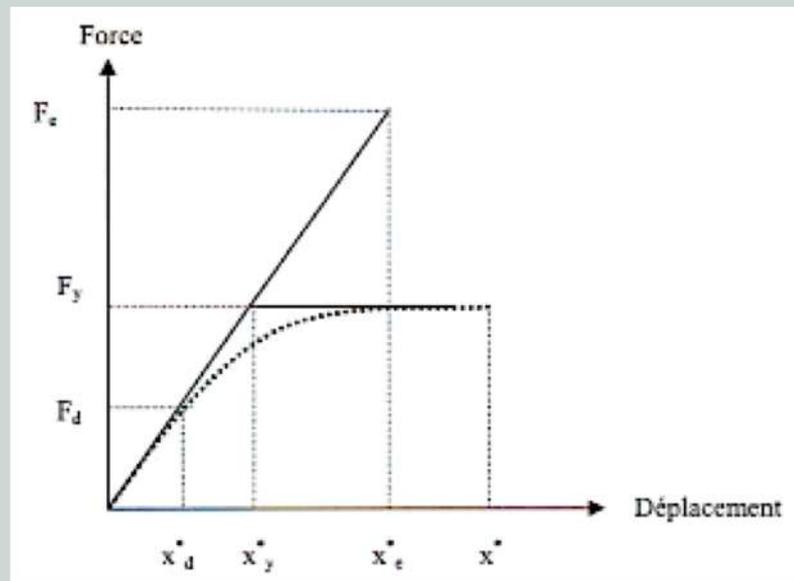
### *Facteur de comportement ?*

Un facteur de comportement est utilisé pour traduire le fait qu'une structure en béton armé a un comportement différent de celui idéal supposé au début

## Détermination du facteur de comportement ?

Courbe de comportement d'un S1DDL équivalent dont la relation non-linéaire est idéalisée en une courbe bi-linéaire

$F_e$ : Force élastique  
 $F_y$ : Force à la limite élastique  
 $F_d$ : Force de calcul  
 $x_e^*$ : déplacement élastique  
 $x_y^*$ : déplacement à la limite élastique  
 $x_d^*$ : déplacement correspondant à la force de calcul  
 $x^*$ : déplacement ultime



Soit :

$$F_y = K x_y^* = M^* \omega^2 x_y^* \quad (15.7)$$

$M^*$  : Masse équivalente du système  
 $\omega$  : pulsation  
 $\mu$  : Ductilité

Et ductilité

$$\mu = \frac{x^*}{x_y^*} \quad (15.6)$$

La ductilité et la force limite élastique sont liées

## Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire Détermination du facteur de comportement ?

En supposant que la structure possède une certaine capacité de déformation non-linéaire, la force  $F_y$  doit être au moins égale à la force sismique appliquée.

Sachant que

$$F_e = M^* S_{ae} \quad (15.8)$$

Avec

$S_{ae}$ : Accélération élastique  
 $R_\mu$ : facteur de réduction de la force. Il dépend de la ductilité et de la période de la structure

En posant

$$R_\mu = \frac{F_e}{F_y} = \frac{M^* S_{ae}}{F_y} \quad (15.9)$$

$$\text{D'où} \quad F_y = \frac{M^* S_{ae}}{R_\mu} \quad (15.10)$$

Notons  $R_s$  le rapport entre la force réelle et celle de calcul (**facteur de surrésistance**)

$$R_s = \frac{F_y}{F_d} \quad (15.11)$$

Dans les RPA, force réelle et de calcul sont les mêmes. D'où  $R_s=1$

Le facteur de comportement global est défini par le rapport de la force élastique et la force de calcul

$$R = \frac{F_e}{F_d} \quad (15.12)$$

En remplaçant (15.9) et (15.11)  
dans (15.12)

$$R = \frac{F_e}{F_d} = \frac{F_e}{F_y} R_s = R_\mu R_s \quad (15.13)$$

$R_\mu?$

## Détermination du facteur de réduction $R_\mu$ ?

Facteur dépendant de la ductilité

Plusieurs propositions

### i. Proposition de Newmark et Hall (1982)

Facteur qui dépend non seulement de la ductilité mais aussi de la période.

**Longues périodes** : même déplacement pour les systèmes élastiques et ductiles avec une même rigidité initiale. Facteur de réduction est égale à la ductilité.

**Courtes périodes** : facteur de ductilité > facteur de réduction. Le critère d'égalité des énergies entre les 02 systèmes est adopté pour le calcul de la force réduite.

$$R_\mu = \begin{cases} 1 & T < T_a \\ (2\mu - 1)^{\beta/2} & T_a < T < T_b \\ \sqrt{2\mu - 1} & T_b < T < T_{c'} \\ \frac{T}{T_c} & T_{c'} < T < T_c \\ \frac{T}{\mu} & T > T_c \end{cases} \quad (15.14)$$

Avec 
$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{T}{T_a}\right)}{\ln\left(\frac{T_b}{T_a}\right)}$$

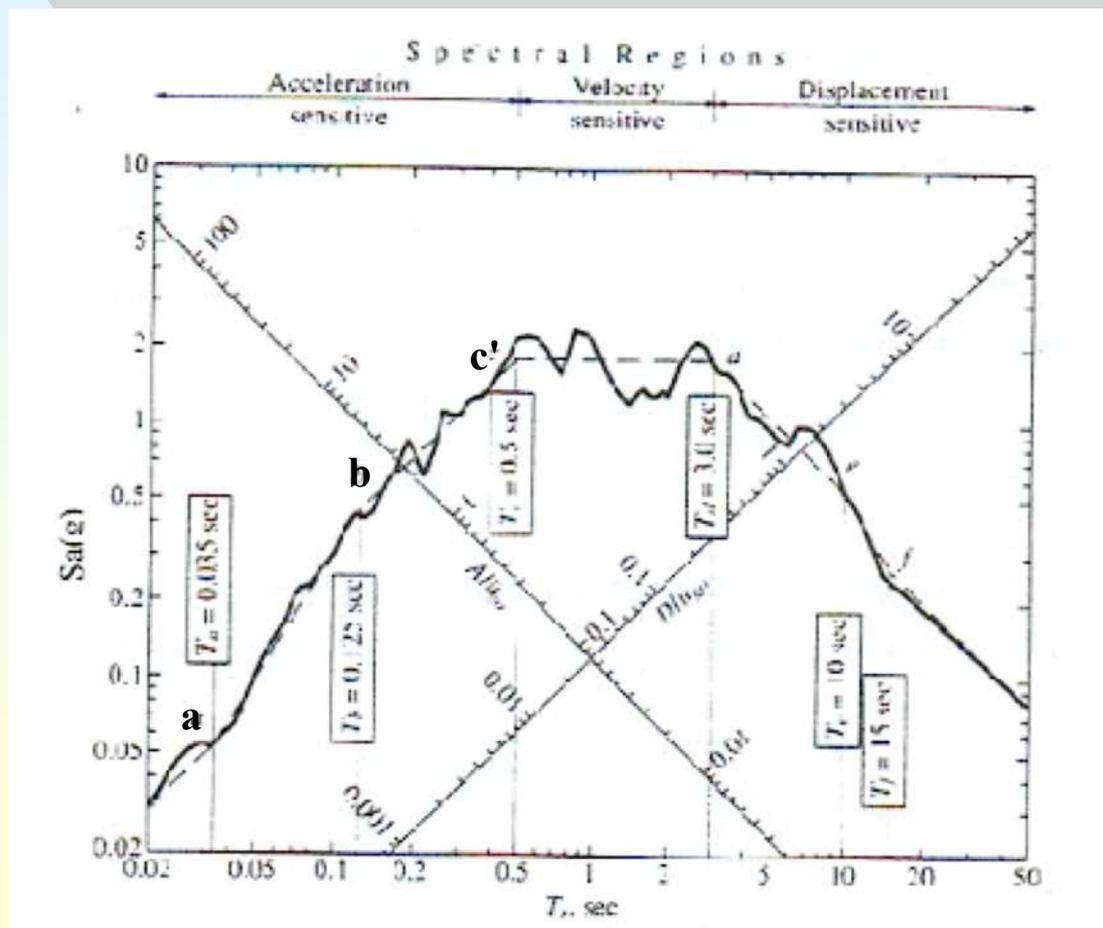
et 
$$T_{c'} = T_c \frac{\sqrt{2\mu - 1}}{\mu}$$

$T_a, T_b, T_{c'}$  et  $T_c$  tirés du spectre

## Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction $R_\mu$ ?*

Les limites des périodes des intervalles sont données  $T_a$ ,  $T_b$  et  $T_c$  du graphe et qui correspondent au séisme d'El Centro. Elles délimitent les segments du spectre idéalisé de Newmark.

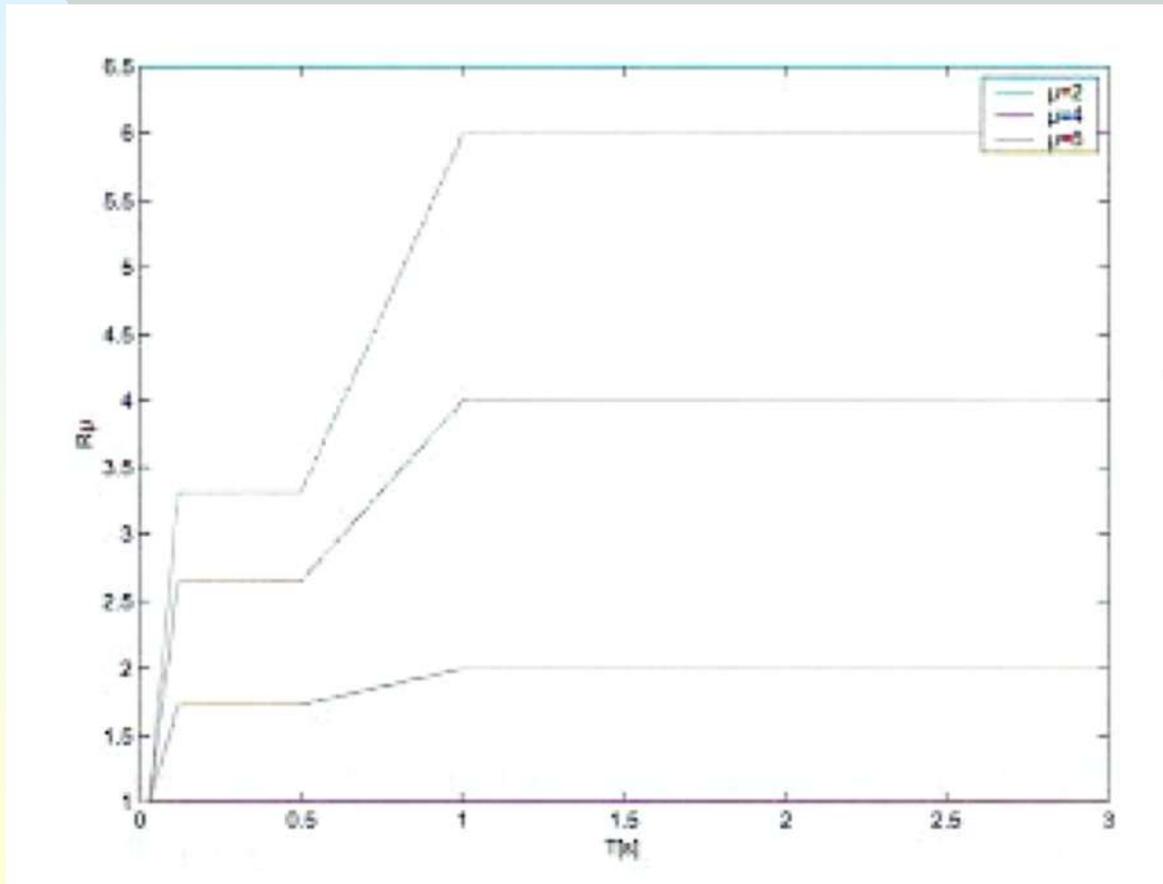
$$T_a=0,03 \text{ s}; T_b=0,12 \text{ s}; T_c=0,5 \text{ s et } T_c=1,0 \text{ s}$$



Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction  $R_\mu$  ?*

*Facteur de réduction  $R_\mu$  pour différentes valeurs de ductilité  
 $\mu = 2, 4, 6$*

*i. Proposition de Newmark et Hall (1982)*



### ii. Proposition de Krawinkler et Nassar (1992)

Suite à une analyse statistique faite aux USA sur 15 séismes de magnitudes entre 5.5 et 7.7 , pour différents types de sols en tenant compte du coefficient d'écroûissage et d'un amortissement de 5%.

Soit:

$$R_{\mu} = [c(\mu - 1) + 1]^{1/c} \quad (15.15)$$

Avec

$$c = c(T, \alpha) = \frac{T^a}{1 + T^a} + \frac{b}{T} \quad (15.16)$$

Avec,

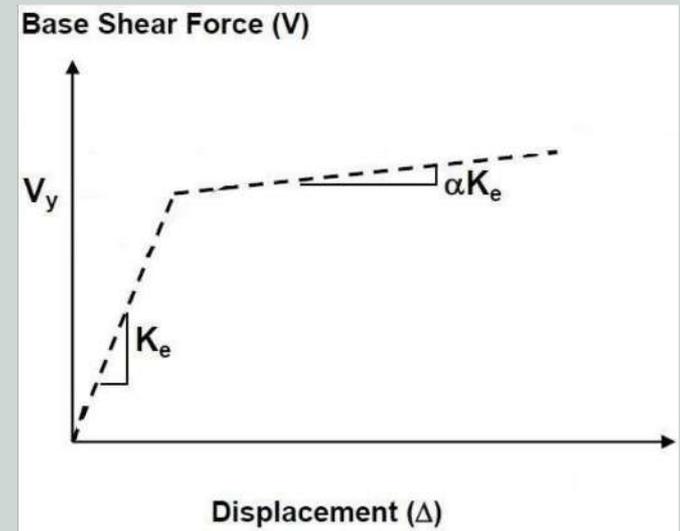
$\mu$  : Ductilité globale de la structure,

$T$  : La période fondamentale de la structure,

$\alpha$  : La rigidité poste-élastique donnée en pourcentage (%).

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont des paramètres de régression qui dépendent de  $\alpha$ .

Pour  $\alpha = 0$ ,  $a = 1$  et  $b = 0.42$ , pour  $\alpha = 2$ ,  $a = 1$  et  $b = 0.37$  et pour  $\alpha = 10$ ,  $a = 0.8$  et  $b = 0.29$ .

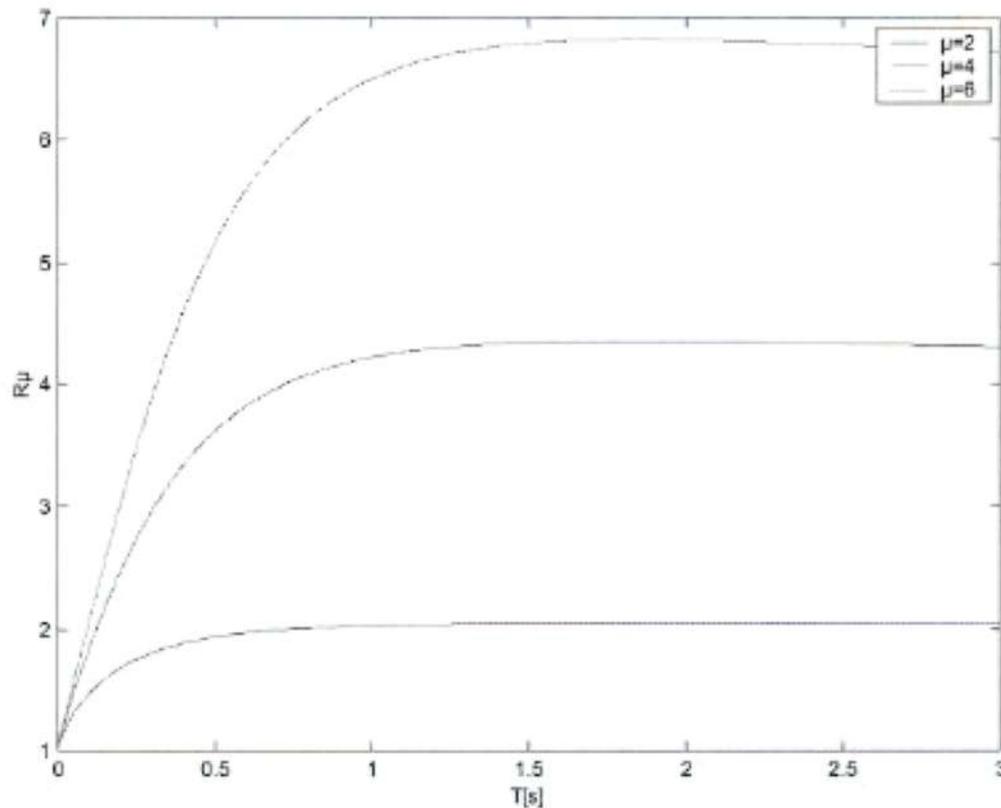


Comportement élasto-plastique avec pente d'écroûissage  $\alpha$

Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction  $R_\mu$  ?*

*Facteur de réduction  $R_\mu$  pour différentes valeurs de ductilité  
 $\mu = 2, 4, 6$*

*ii. Proposition de Krawinkler et Nassar (1992)*



**iii. Proposition de Miranda et Bertero (1994)**

Suite à une analyse faite sur 124 séismes pour différents types de sols

Soit:

$$R_{\mu} = \frac{\mu - 1}{\lambda} + 1 \quad \lambda : \text{Paramètre qui dépend du type de sol} \quad (15.17)$$

Sol rocheux

$$\lambda = 1 + \frac{1}{10 T - \mu T} - \frac{1}{2 T^{(-1,5(\ln T - 0,6)^2)}} \quad (15.18)$$

Sol argileux

$$\lambda = 1 + \frac{1}{12 T - \mu T} - \frac{2}{5 T^{(-2(\ln T - 0,2)^2)}} \quad (15.19)$$

Sol meuble

$$\lambda = 1 + \frac{T_1}{3 T} - \frac{3 T_c}{4 T^{(-3(\ln \frac{T}{T_1} - 0,25)^2)}} \quad (15.20)$$

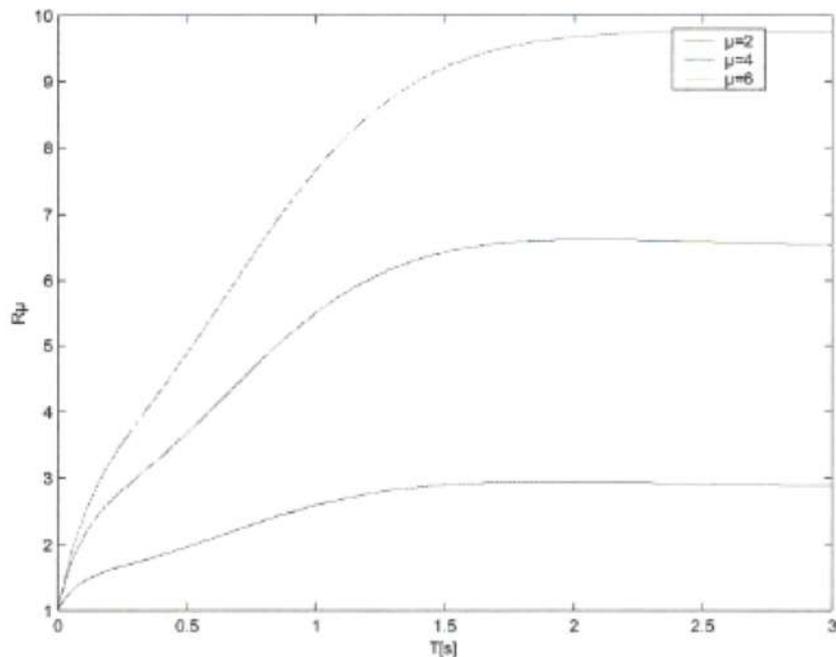
$T_1$  : Période prédominante du séisme

$T_c$  : Période caractéristique du sol définie à la fin du palier du spectre de réponse

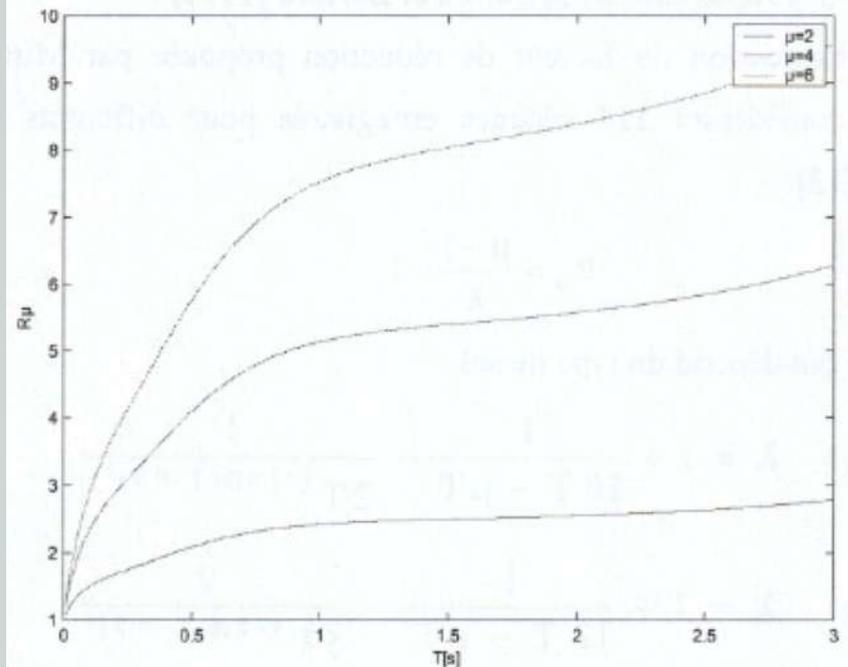
Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction  $R_\mu$  ?*

*Facteur de réduction  $R_\mu$  pour différentes valeurs de ductilité  
 $\mu = 2, 4, 6$*

*iii. Proposition de Miranda et Bertero (1994)*



Sol Rocheux



Sol Argileux

### iv. Proposition de Vidic et al (1994)

Suite à une analyse faite sur 20 séismes de Californie et Monténégro 1979 avec une durée de 10s et 30s et une période entre 0,3 et 0,8 s.

Soit:

$$R_{\mu} = c_1(\mu - 1)^{c_R} \frac{T}{T_c} + 1 \quad T < T_c \quad (15.21)$$

$$R_{\mu} = c_1(\mu - 1)^{c_R} + 1 \quad T > T_c \quad (15.22)$$

$T_c$ : période caractéristique du sol liée à la période prédominante du séisme  $T_1$  par :

$$T_c = c_2 \mu^{c_T} T_1 \quad (15.23)$$

Ce sont des courbes bi-linéaires où dans la gamme des courtes périodes,  $R_{\mu}$  croît linéairement avec une période jusqu'à atteindre la valeur de ductilité où la courbe devient constante.

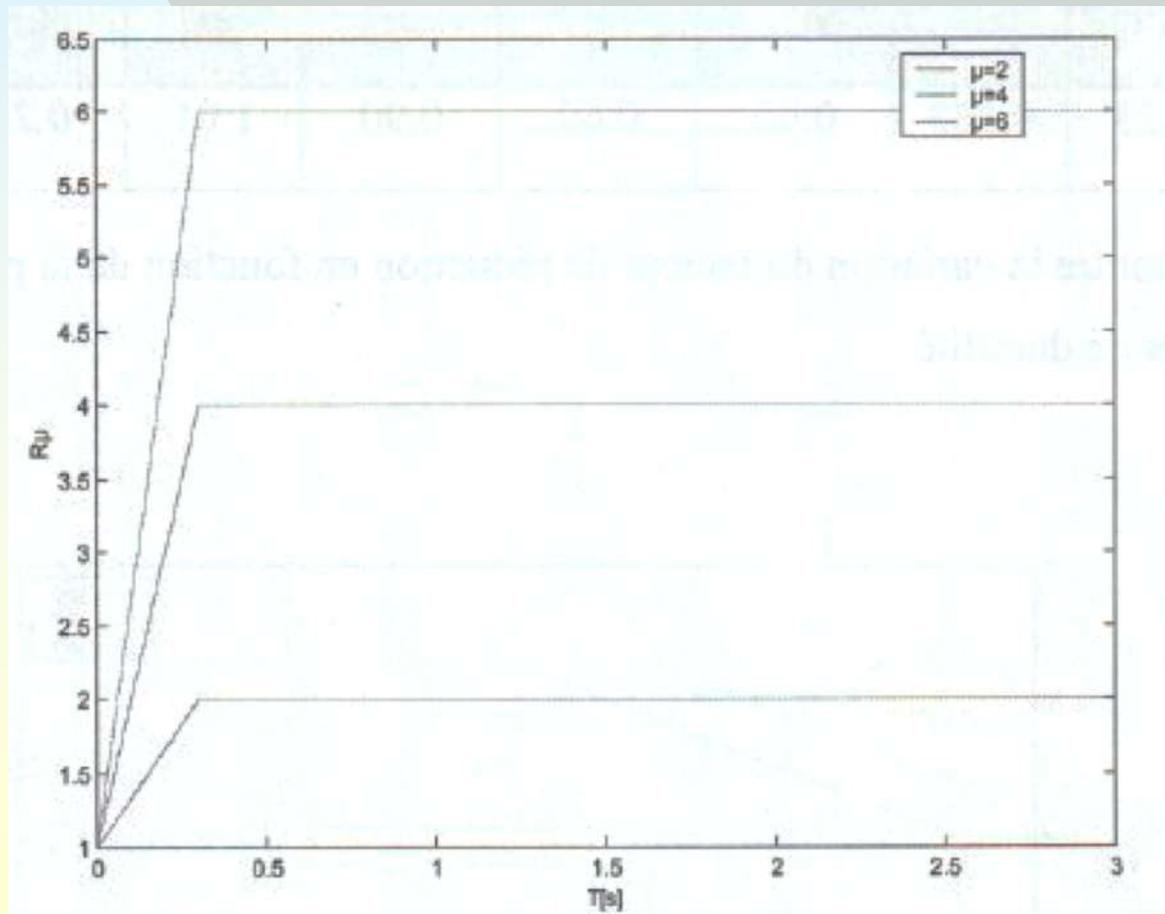
$c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_R$  et  $c_T$  : Paramètres qui dépendent du comportement hystérétique

Exemple:  $c_1=1,35$  ;  $c_2=0,75$  ;  $c_R=0,95$  et  $c_T=0,2$

Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction  $R_\mu$  ?*

*Facteur de réduction  $R_\mu$  pour différentes valeurs de ductilité  
 $\mu = 2, 4, 6$*

*iv. Proposition de Vidic et al (1994)*



### v. Proposition de Borzi et Elnashai (1999)

Ce sont des courbes tri-linéaires données par

Soit: 
$$R_{\mu} = (R_{\mu 1} - 1) \frac{T}{T_1} + 1 \quad T < T_1 \quad (15.24)$$

$$R_{\mu} = R_{\mu 1} + (R_{\mu 2} - R_{\mu 1}) \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad T_1 < T < T_2 \quad (15.25)$$

$$R_{\mu} = R_{\mu 2} \quad T > T_2 \quad (15.26)$$

Avec 
$$T_1 = b_{T1} \quad T_2 = a_{T2}\mu + b_{T2}$$
$$R_{\mu 1} = a_1\mu + b_1 \quad R_{\mu 2} = a_2\mu + b_2$$

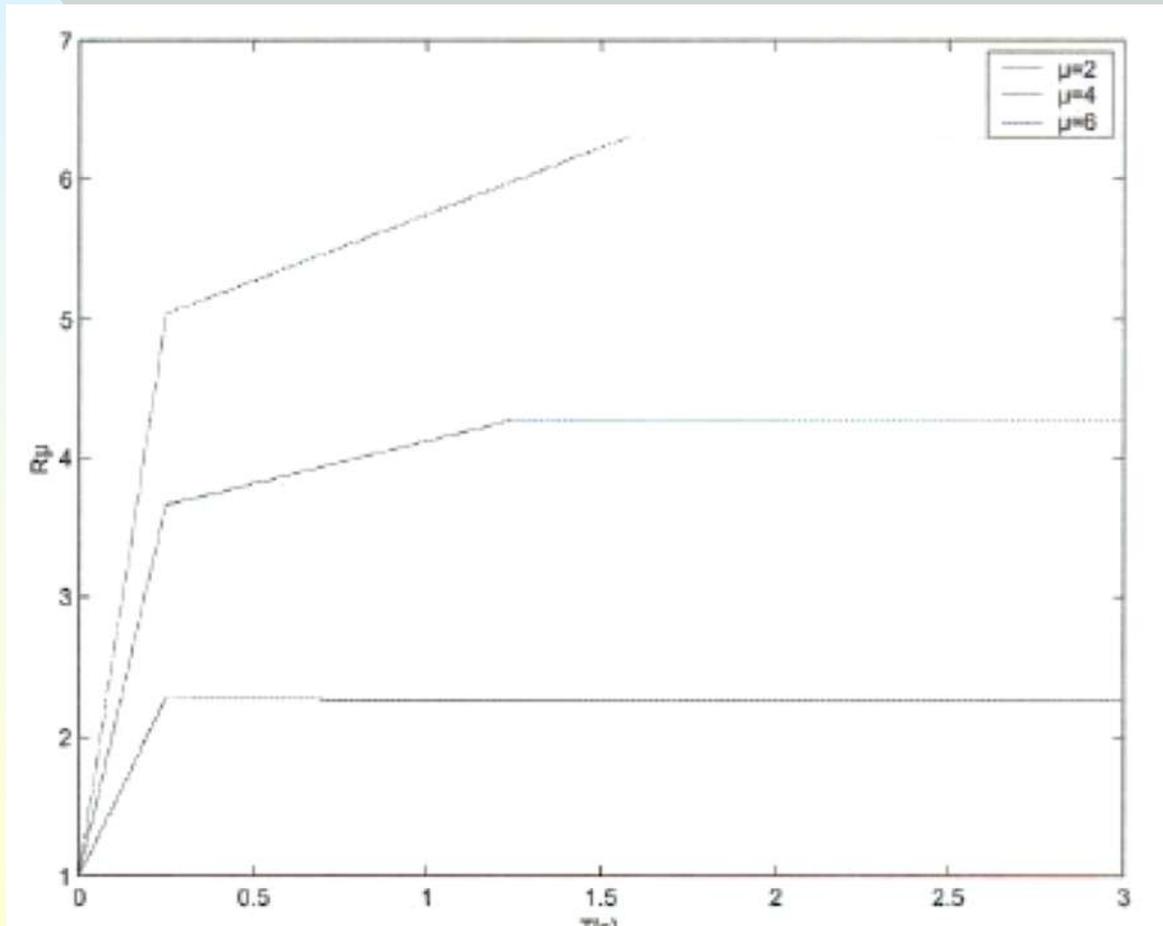
$b_{T1}$ ,  $b_{T2}$ ,  $a_{T2}$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  : Paramètres données par

Exemple:  $b_{T1}=0,25$  ;  $a_{T2}=0,163$  ;  $b_{T2}=0,60$  ;  
 $a_1=0,69$  ;  $b_1=0,90$  ;  $a_2=1,01$  et  $b_2=0,24$

Calcul élastique équivalent au calcul non linéaire *Détermination du facteur de réduction  $R_\mu$  ?*

*Facteur de réduction  $R_\mu$  pour différentes valeurs de ductilité  
 $\mu = 2, 4, 6$*

*v. Proposition de Borzi et Elnashai (1999)*



## *Facteur de réduction $R_\mu$*

### *vi. Comparaison entre les différentes propositions*

Pour (exemple):

$$\mu = 4$$

et 02 valeurs de la période

$$T_1 : 0,2 \text{ s}$$

$$T_2 : 1,0 \text{ s}$$

On aura:

Valeur de  $R_\mu$  des différentes propositions pour  
02 périodes différentes et  $\mu = 4$

T	Newmark	Krawin	Miranda	Vidic	Borzi
0,2	2,64	2,46	2,64	3	3,13
1,0	4	4,21	5,5	4	4,12

Pour des périodes  $>$  à la période caractéristique, le facteur de réduction ( $R_\mu$ ) est égal ou proche du facteur de ductilité ( $\mu$ ).

**Non linéarité**

- Matérielle
- **Géométrie**

# 5. Non-linéarité géométrique

## *Notion de l'effet $P-\Delta$*

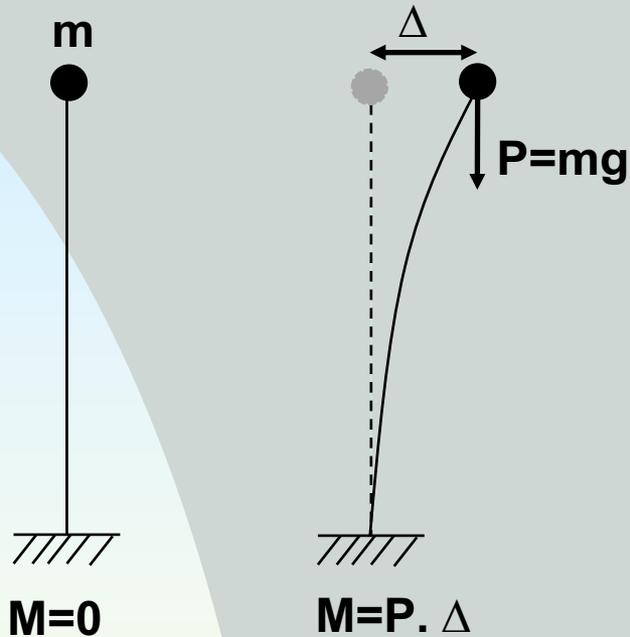
Problème de stabilité ou bien problème de non linéarité géométrique

**Problèmes à grands déplacements  
Ou bien problèmes à grandes déformations**

**Généralement résolus numériquement  
(MEF) par approximations successives**

**Cas des structures construites en zones sismiques : Phénomène très important et intervient dans la sécurité de la structure dans son ensemble et des éléments qui la composent**

**Problème de stabilité : Problème à grands déplacements**



$\Delta$  : déplacement horizontal (linéaire ou non) peut devenir important sous l'action horizontale du séisme.

$m$  : n'est pas uniquement une inertie mais son poids peut provoquer un moment de renversement (déstabilisateur) supplémentaire et une amplification du déplacement.

### L'effet P- $\Delta$

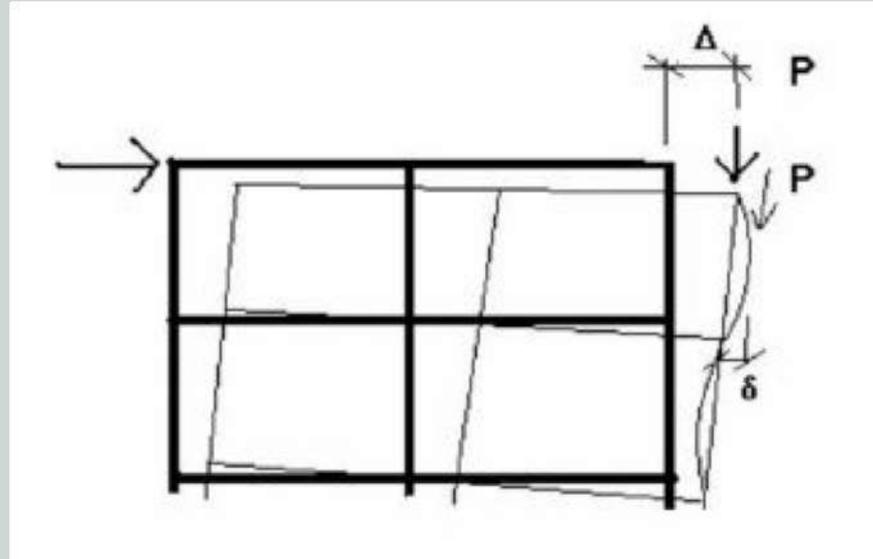
L'effet P- $\Delta$  dépend de :

- ✓ La valeur de la force axiale
- ✓ La rigidité de la structure globale
- ✓ La rigidité des éléments de la structure

## 02 Types d'effet $P-\Delta$



Grand effet  $P-\Delta$



Petit effet  $P-\delta$

Lors de la déflexion, les caractéristiques **flexionnelles** de la structure changent en présence de la charge axiale en s'accroissant (Globalement et localement)

**Merci. Fin du chapitre 15**

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Prochain Cours**

**Chap. 16**

**Éléments de conception en  
zone sismique**