Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 18

Idéalisation bilinéaire de la courbe de capacité selon FEMA 356

Exemple 18 **Mercredi 23.04.2024**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Objectif

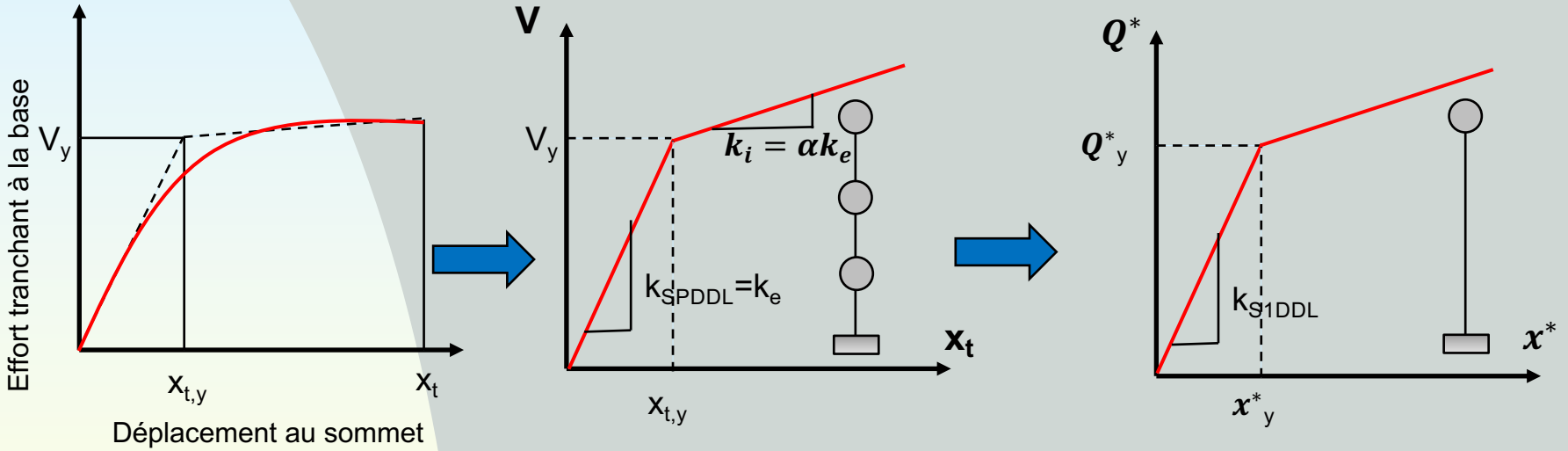
Le but de cette application est de :

- **Transformer une courbe push over non linéaire en une courbe bilinéaire idéalisée, où on peut distinguer la phase élastique de la phase inélastique.**
- **On utilise les recommandations de FEMA356,**
  - ✓ **Relation force – déplacement doit être bilinéaire, avec une pente initiale élastique (Ke) et une pente post-élastique (α).**
  - ✓ **Les segments de ligne de la courbe idéalisée doivent être fixés après un calcul graphique itératif de façon à ce que les surfaces au-dessus et au-dessous de la courbe réelle soient approximativement égales.**
  - ✓ **La rigidité latérale effective K_e doit être prise comme la rigidité sécante calculée à 60% de l'effort élastique effectif (V_y).**

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Courbe Pushover ?

✓ **La courbe pushover (SPDDL) non-linéaire doit être idéalisée à une courbe bi-linéaire pour identifier les paramètres globaux en terme de déplacement et de force, ce qui permet de définir l'effort tranchant à la limite élastique**



✓ **De cette courbe, on tire V_y et $x_{t,y}$**

✓ **On peut calculer $k_e = \frac{V_y}{x_{t,y}}$ et $k_i = \alpha k_e$**

✓ **On remplace V_y et $x_{t,y}$ dans (19.3) et (19.5)**

$$(19.6) \quad x^*_y = \frac{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[M]\{\Delta\}} x_{t,y}$$

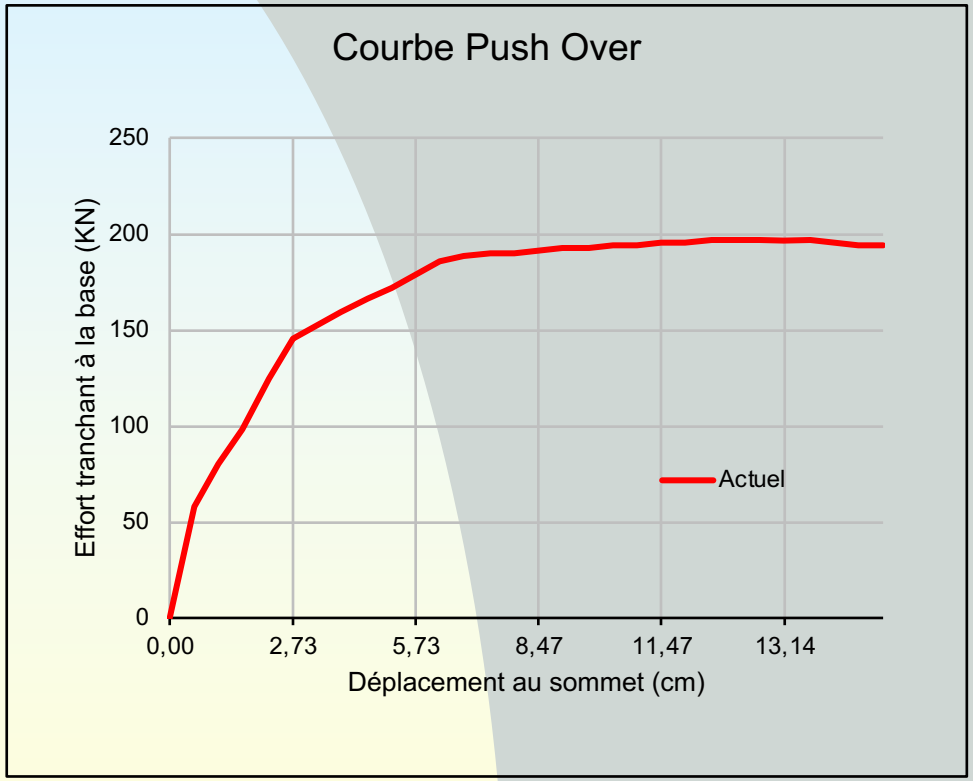
$$Q^*_y = \{\phi\}^T[Q_y]$$

$$(19.7) \quad \text{Avec:} \quad \boxed{V_y = \{\Delta\}^T[Q_y]}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Exemple

Exemple traité par SAP2000, pour obtenir la courbe Push over suivante:

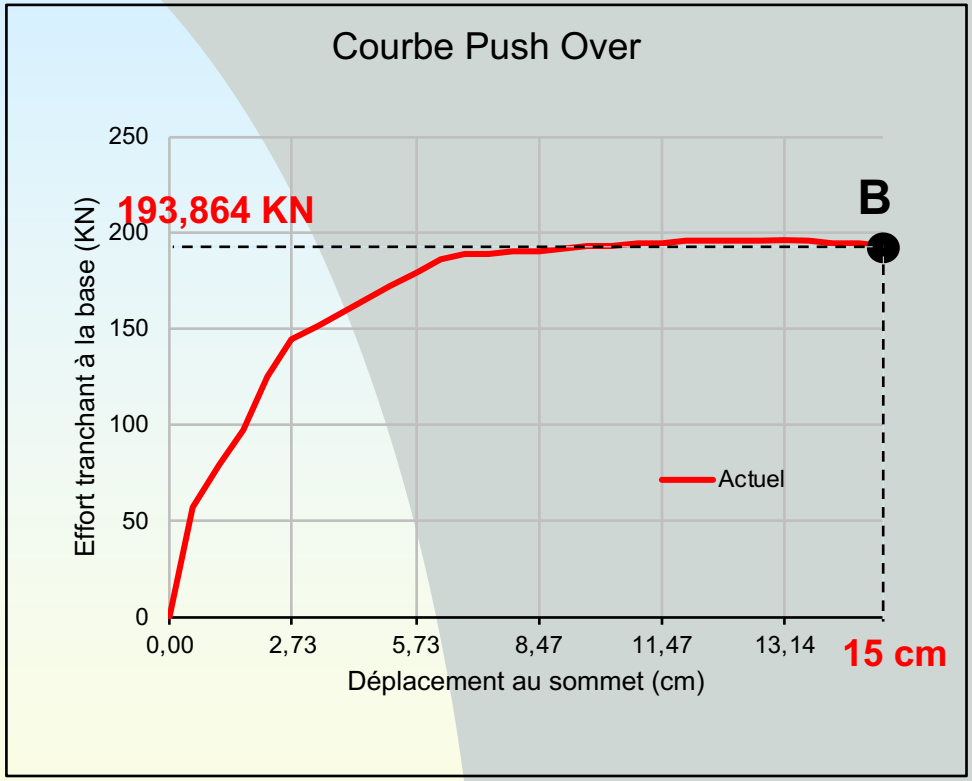


Fichier EXCEL

Displacement	BaseForce
cm	KN
0	0
0,6	57,989
0,8266	79,886
1,1122	98,096
1,9615	125,132
2,7278	145,168
3,3278	151,96
3,9278	158,752
4,5278	165,544
5,1278	172,337
5,7278	179,129
6,3278	185,921
6,6735	188,843
7,2735	189,429
7,8735	190,32
8,4735	191,114
9,0735	192,003
9,6735	192,802
10,2735	193,695
10,8735	194,492
11,4735	195,388
11,711	195,967
12,0352	196,239
12,5688	196,418
12,9438	196,408
13,1425	196,462
13,4376	196,107
14,0376	194,86
14,6376	194,345
15	193,864

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

1. Définir le point d'ancrage « B » au déplacement du sommet cible



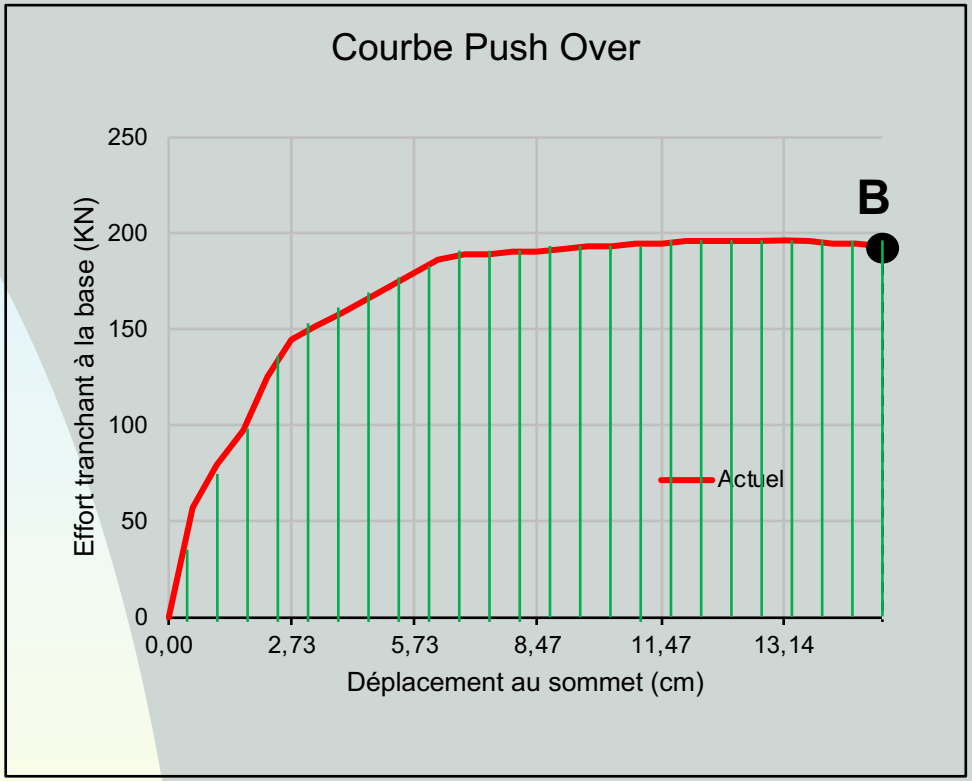
Displacement	BaseForce
cm	KN
0	0
0,6	57,989
0,8266	79,886
1,1122	98,096
1,9615	125,132
2,7278	145,168
3,3278	151,96
3,9278	158,752
4,5278	165,544
5,1278	172,337
5,7278	179,129
6,3278	185,921
6,6735	188,843
7,2735	189,429
7,8735	190,32
8,4735	191,114
9,0735	192,003
9,6735	192,802
10,2735	193,695
10,8735	194,492
11,4735	195,388
11,711	195,967
12,0352	196,239
12,5688	196,418
12,9438	196,408
13,1425	196,462
13,4376	196,107
14,0376	194,86
14,6376	194,345
15	193,864

$$u_t = 15\ cm\ ;\quad V_b = 193,864\ KN$$

Point « B »

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

2. Calculer la surface sous la courbe push over actuelle, « A_{actuel} »



Courbe définie par points, on utilise n'importe quelle méthode numérique (Sommation simple, Trapèze, Simpson,…)

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

1. Méthode de sommation simple

On suppose « y(x) » constante dans l'intervalle « Δx »

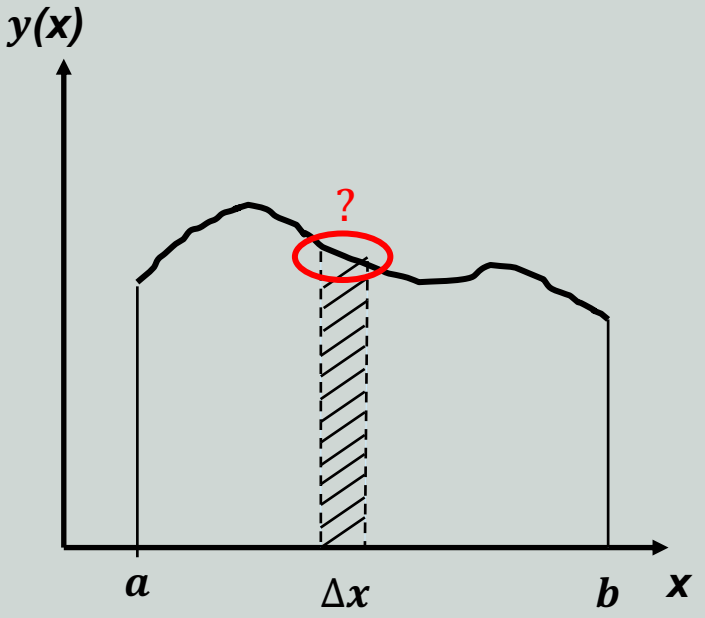
$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ de\ tous\ les\ rectangles$$

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\, y_0 + \Delta x\, y_1 + \Delta x\, y_2 + \cdots + \Delta x\, y_{n-1}$$

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\,(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

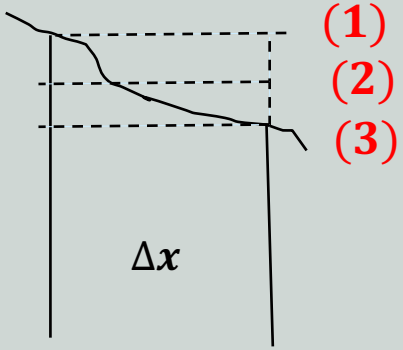
Or $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

D'où $$\int_a^b y(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$



On suppose « Δx » constant.

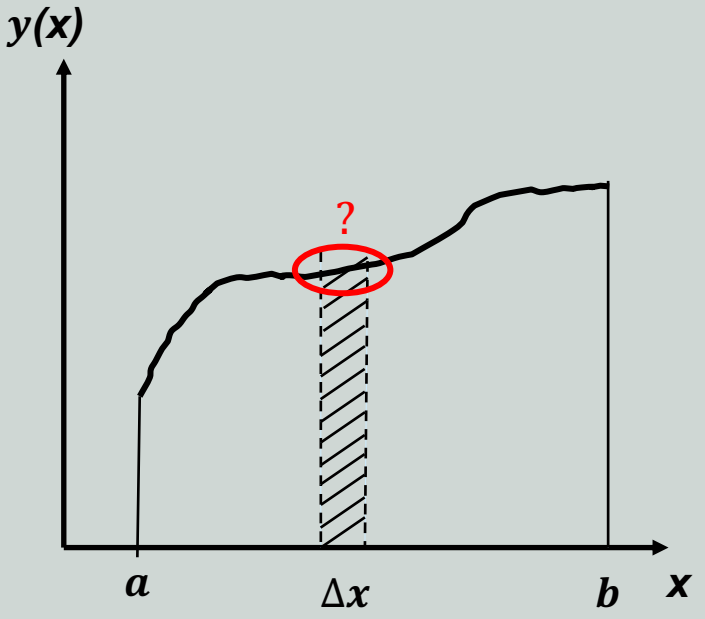
$$\frac{y_0 + y_1}{2}$$ y_0 y_1



© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

2. Méthode des trapèzes

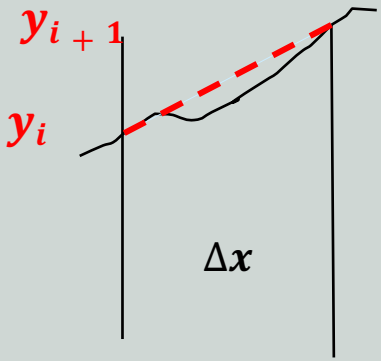
On suppose « y(x) » varie linéairement dans l'intervalle « Δx »



$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ des\ trapèzes$$

Or $$Aire\ trapèze = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_i + y_{i+1})$$

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\Delta x\,(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{1}{2}\Delta x\,(y_{n-1} + y_n)$$



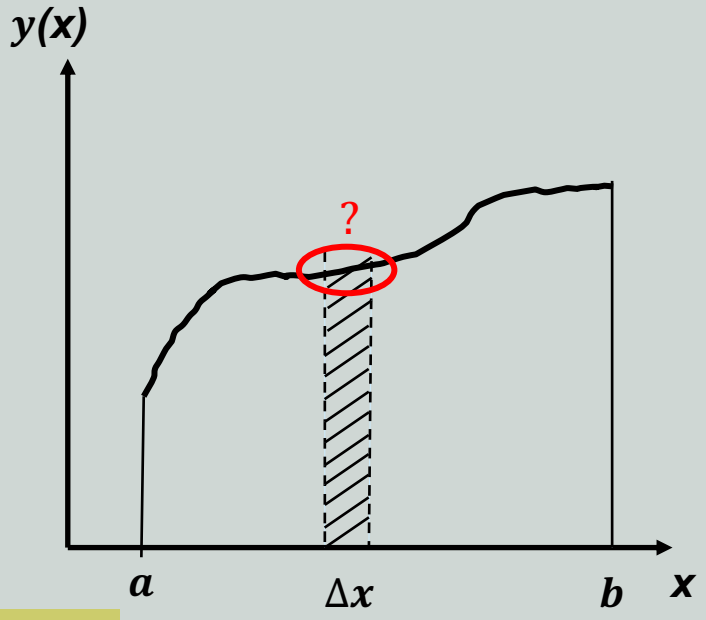
$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\Delta x\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Or $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

D'où $$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

3. Méthode de Simpson

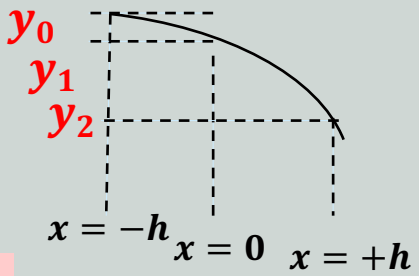


On suppose « y(x) » varie de façon parabolique dans l'intervalle « Δx »

On aura besoin de 03 points pour définir une parabole

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_1^n aires\ de\ toutes\ les\ paraboles$$

$$Aire\ 1\ parabole = \int_{-h}^{+h} y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



D'où

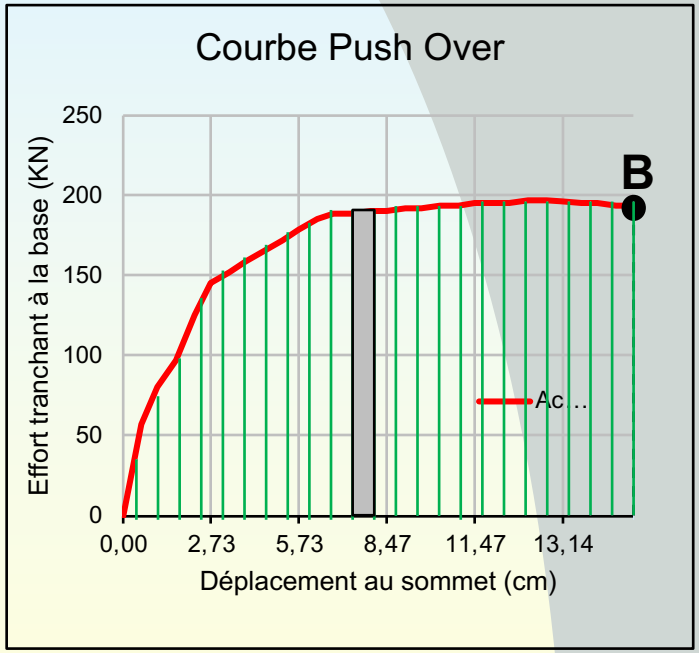
$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$ n : entier pair

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

2. Calculer la surface sous la courbe push over actuelle, « A_{actuel} »

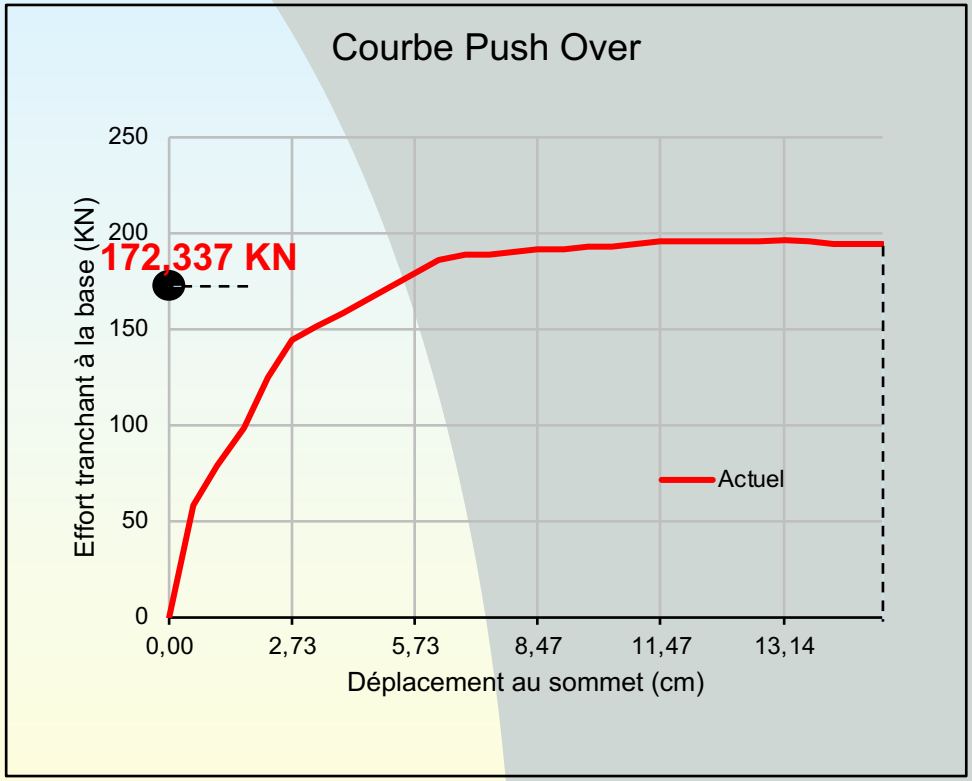
On utilise (par exemple), la méthode des trapèzes



$$A_{actuel} = 25,289\ m^2$$

Displacement	BaseForce	D_x	$(Y_i + Y_{i-1})/2$	$D_{surface}$
cm	KN	cm	KN	
0	0			
0,006	57,989	0,006	28,9945	0,173967
0,008266	79,886	0,002266	68,9375	0,15621238
0,011122	98,096	0,002856	88,991	0,2541583
0,019615	125,132	0,008493	111,614	0,9479377
0,027278	145,168	0,007663	135,15	1,03565445
0,033278	151,96	0,006	148,564	0,891384
0,039278	158,752	0,006	155,356	0,932136
0,045278	165,544	0,006	162,148	0,972888
0,051278	172,337	0,006	168,9405	1,013643
0,057278	179,129	0,006	175,733	1,054398
0,063278	185,921	0,006	182,525	1,09515
0,066735	188,843	0,003457	187,382	0,64777957
0,072735	189,429	0,006	189,136	1,134816
0,078735	190,32	0,006	189,8745	1,139247
0,084735	191,114	0,006	190,717	1,144302
0,090735	192,003	0,006	191,5585	1,149351
0,096735	192,802	0,006	192,4025	1,154415
0,102735	193,695	0,006	193,2485	1,159491
0,108735	194,492	0,006	194,0935	1,164561
0,114735	195,388	0,006	194,94	1,16964
0,11711	195,967	0,002375	195,6775	0,46473406
0,120352	196,239	0,003242	196,103	0,63576593
0,125688	196,418	0,005336	196,3285	1,04760888
0,129438	196,408	0,00375	196,413	0,73654875
0,131425	196,462	0,001987	196,435	0,39031634
0,134376	196,107	0,002951	196,2845	0,57923556
0,140376	194,86	0,006	195,4835	1,172901
0,146376	194,345	0,006	194,6025	1,167615
0,15	193,864	0,003624	194,1045	0,70343471
			Surface	**25,2892916**

3. Estimer la première valeur de « V_y » (par jugement). Valeur qui sera raffinée par itérations en égalisant les surfaces sous la courbe push over actuelle et celle sous la courbe idéalisée



Notre choix

On commence les itérations par

$$V_y^1 = 172,337\ KN$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

4. Calculer la pente initiale de la courbe bilinéaire idéalisée « k^1 »

On trace une ligne droite entre l'origine « O » et un point sur la courbe push over actuelle avec une valeur de l'effort tranchant à la base égale à 60% de la valeur estimée initialement. Soit

$60\% \text{ x } V_y^1$ ⇒ $0,6\ x\ V_y^1 = 0,6\ x\ 172,337 = 103,402\ KN$

Du tableau des résultats de push over, on tire le déplacement « $u_{t,0,6}$ » correspondant à « $V_{by} = 103,402KN$ »

On interpole

$103,402\ KN$

Displacement	BaseForce	D_x	$(Y_i + Y_{i-1})/2$	$D_{surface}$
cm	KN	cm	KN	
0	0			
0,011122	98,096	0,002856	88,991	0,2541583
0,019615	125,132	0,008493	111,614	0,9479377
0,027278	145,168	0,007663	135,15	1,03565445
0,033278	151,96	0,006	148,564	0,891384

$u_{t,0,6} = 0,012788\ m$

La pente initiale « k^1 » sera : $k^1 = \dfrac{(0,6\ x\ V_y^1)}{u_{t,0,6}} = \dfrac{(103,402)}{0,012788} = 8085,86\ KN/m$

$k^1 = 8085,86\ KN/m$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

5. Calculer le déplacement « $u_{t,y}^1$ »

En utilisant la rigidité initiale « k^1 » on calcule le déplacement « $u_{t,y}^1$ » correspondant à la valeur estimée de l'effort tranchant « $V_y^1 = 172,337$ »

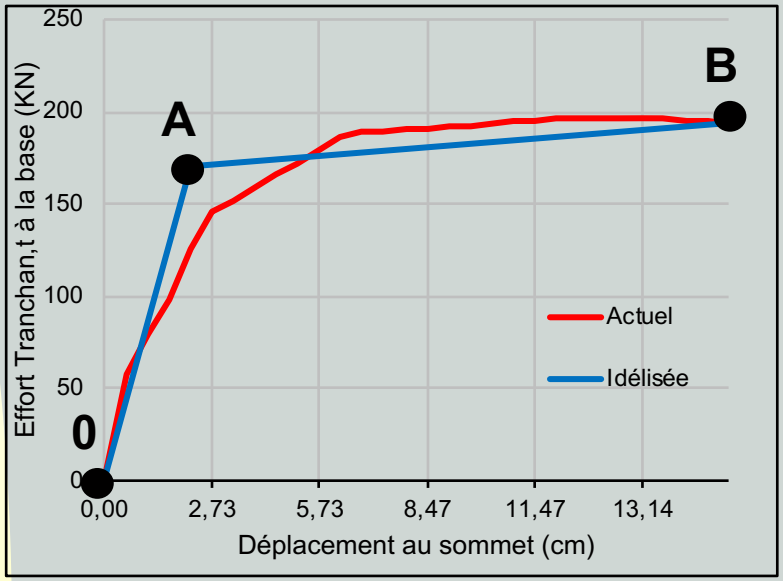
$$u_{t,y}^1 = \frac{V_y^1}{k^1} = \frac{172,337}{8085,86} = 0,021314\ m$$

Point « A »

$$u_{t,y}^1 = 0,021314\ m;$$
$$V_y^1 = 172,337\ KN$$

6. Tracer la 1ère courbe (1ère itération) bilinéaire OAB

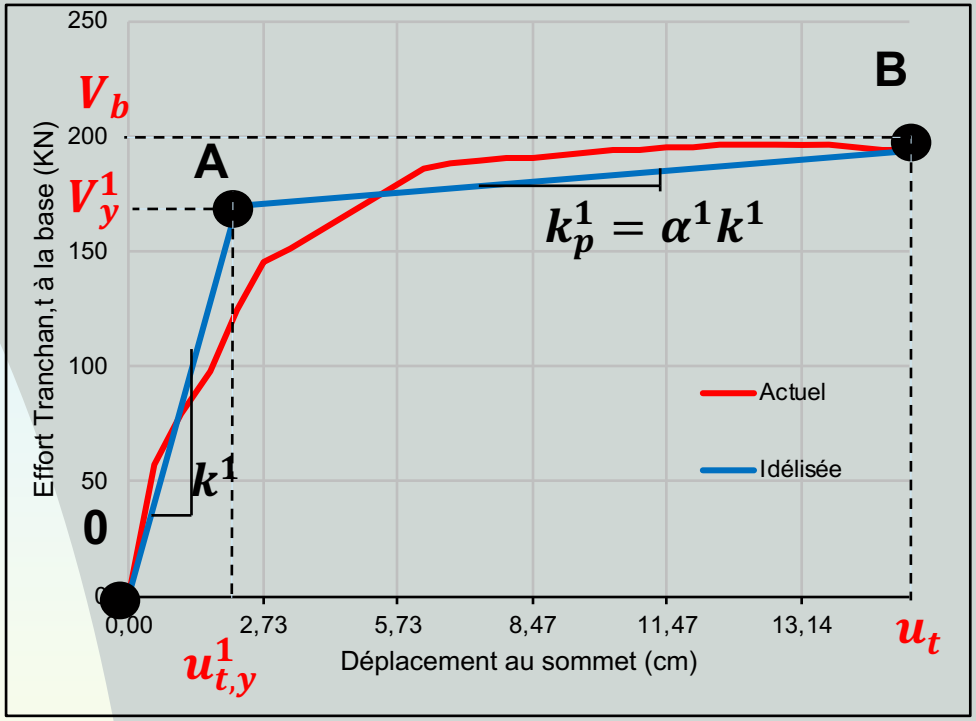
On trace les droites « OA » et « AB »



© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

7. Calculer le coefficient « α^1 » de la rigidité plastique.

Entre « A » et « B », on peut calculer la pente

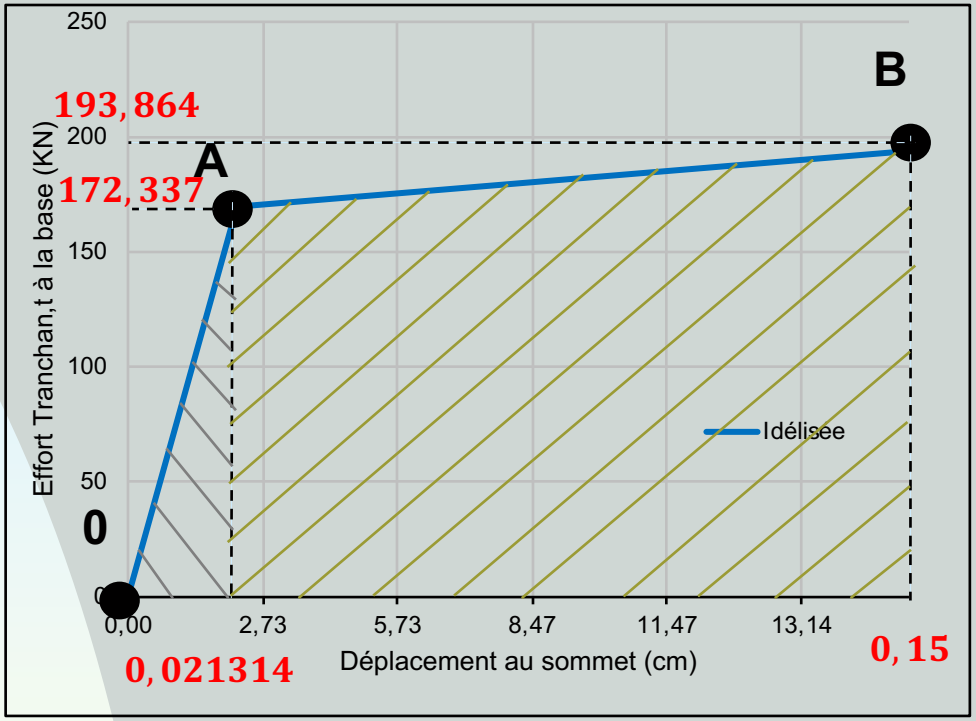


$$\alpha^1 = \frac{\left[\left(\frac{V_b}{V_y^1}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{u_t}{u_{t,y}^1}\right) - 1\right]} = \frac{\left[\left(\frac{193,864}{172,337}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{0,15}{0,021314}\right) - 1\right]} = 0,02068$$

$$\alpha^1 = 0,02068$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

8. Calculer l'aire sous la courbe idéalisée « A_{id}^{1} ».



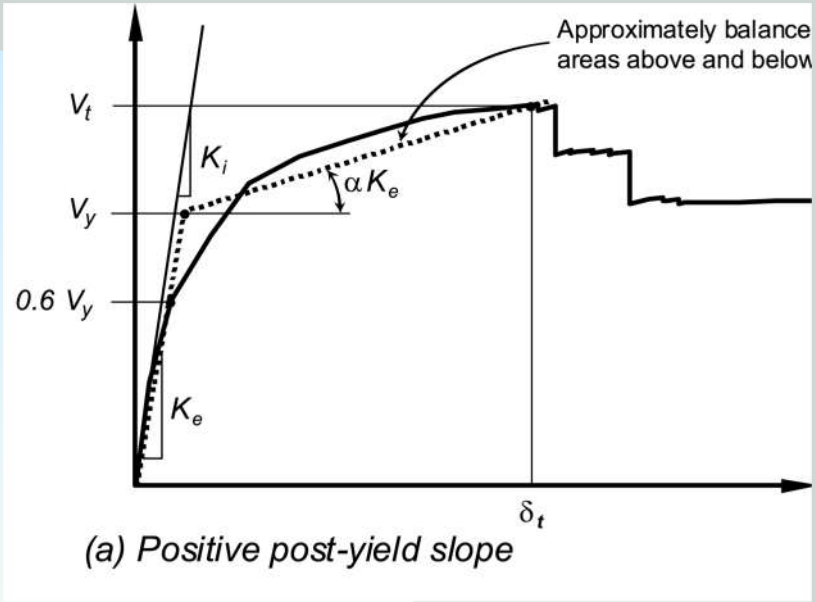
$$A_{id}^{1} = \frac{\left[u_{t,y}^{1}\ x\ V_{y}^{1}\right]}{2} + \frac{\left[\left(V_b + V_{y}^{1}\right)\ x\ \left(u_t - u_{t,y}^{1}\right)\ \right]}{2}$$

$$A_{id}^{1} = \frac{[0,021314\ x\ 172,337]}{2} + \frac{[(193,864 + 172,337)\ x\ (0,15 - 0,021314)\ ]}{2}$$

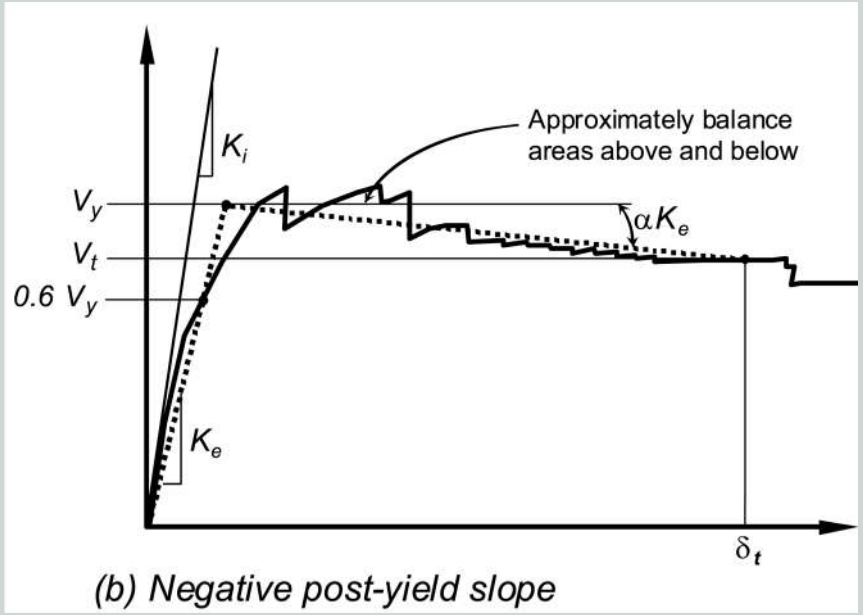
$$A_{id}^{1} = 25,399\ m^2$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

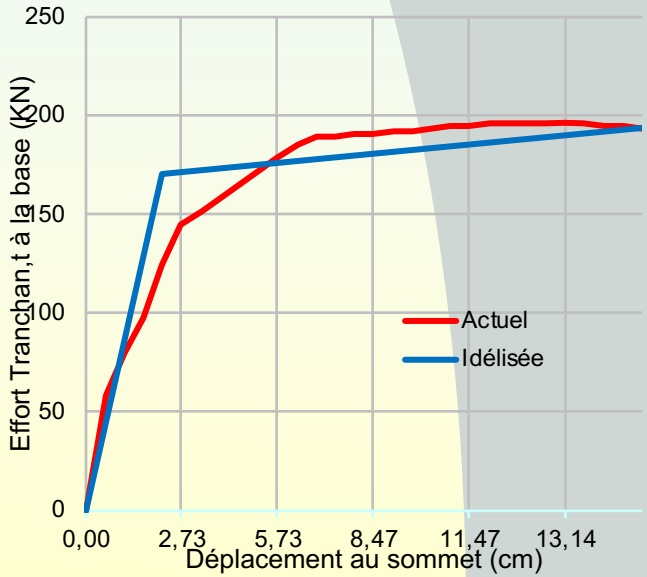
9. Calcul de l'erreur entre les 02 surfaces « A_{actuel} » et « A_{id}^{1} ».



(a) Positive post-yield slope



(b) Negative post-yield slope



$$erreur = 100\ x\ \frac{[A_{id}^{1} - A_{actuel}]}{A_{actuel}}$$

$$erreur = 100\ x\ \frac{[25,399 - 25,289]}{25,289}$$

$$erreur = 0,4349\ \%$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

9. Calcul de l'erreur entre les 02 surfaces « A_{actuel} » et « A_{id}^{1} ».

Comparer l'erreur avec la tolérance fixée. Soit Tol= 0,01 %

Si erreur < Tolérance ➡ **On arrête les itérations, et on retient les dernières valeurs de « $u_{t,y}^{n}$ » ; « V_y^n » et « α^n »**

Si erreur > Tolérance ➡ **On recommence les itérations, à partir de l'étape 4 jusqu'à 8, avec**

$$V_y^2 = V_y^1 \, x \left(\frac{A_{actuel}}{A_{id}^1} \right)$$

Notre cas

$$erreur = 0,4349\ \% > \text{Tol= 0,01 \%}$$

➡ **On va vers la 2ème itération, avec**

$$V_y^2 = 172,334 \, x \left(\frac{25,289}{25,399} \right) = 171,587\ KN$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Itération 2

$$V_y^2 = 171,587\ KN$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

4. Calculer la pente initiale de la courbe bilinéaire idéalisée « k^1 »

On trace une ligne droite entre l'origine « O » et un point sur la courbe push over actuelle avec une valeur de l'effort tranchant à la base égale à 60% de la valeur estimée initialement. Soit

$60\% \text{ x } V_y^1$ ⇒ $0,6\ x\ V_y^1 = 0,6\ x\ 171,587 = 102,952\ KN$

Du tableau des résultats de push over, on tire le déplacement « $u_{t,0,6}$ » correspondant à « $V_{by} = 102,952\ KN$ »

On interpole

$102,952\ KN$ ⇒

Displacement	BaseForce	D_x	$(Y_i + Y_{i-1})/2$	$D_{surface}$
cm	KN	cm	KN	
0	0			
0,011122	98,096	0,002856	88,991	0,2541583
0,019615	125,132	0,008493	111,614	0,9479377
0,027278	145,168	0,007663	135,15	1,03565445
0,033278	151,96	0,006	148,564	0,891384

$u_{t,0,6} = 0,012647\ m$

La pente initiale « k^2 » sera : $k^2 = \dfrac{(0,6\ x\ V_y^2)}{u_{t,0,6}} = \dfrac{(102,952)}{0,012647} = 8140,14\ KN/m$

$k^2 = 8140,14\ KN/m$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

5. Calculer le déplacement « $u_{t,y}^2$ »

En utilisant la rigidité initiale « k^2 » on calcule le déplacement « $u_{t,y}^2$ » correspondant à la valeur estimée de l'effort tranchant « $V_y^2 = 171,587$ »

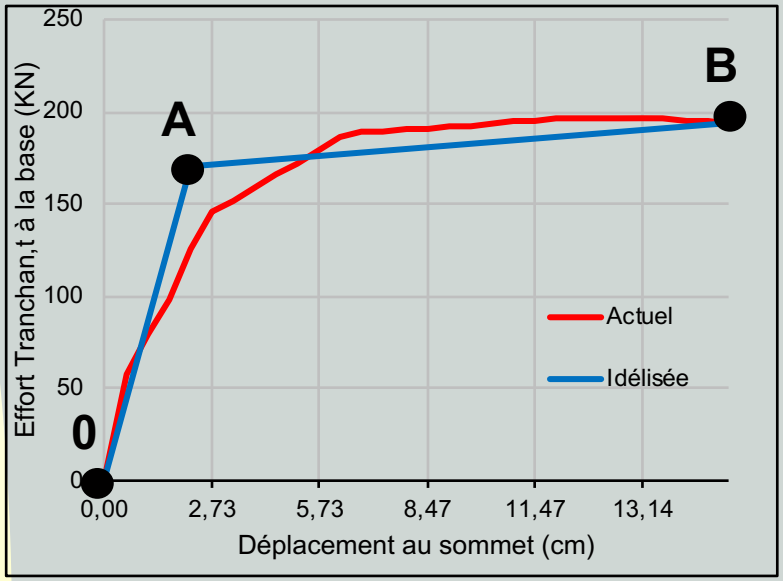
$$u_{t,y}^2 = \frac{V_y^2}{k^2} = \frac{171,587}{8140,14} = 0,02108\ m$$

Point « A »

$$u_{t,y}^{(2)} = 0,02108\ m;$$
$$V_y^{(2)} = 171,587\ KN$$

6. Tracer la courbe (2ème itération) bilinéaire OAB

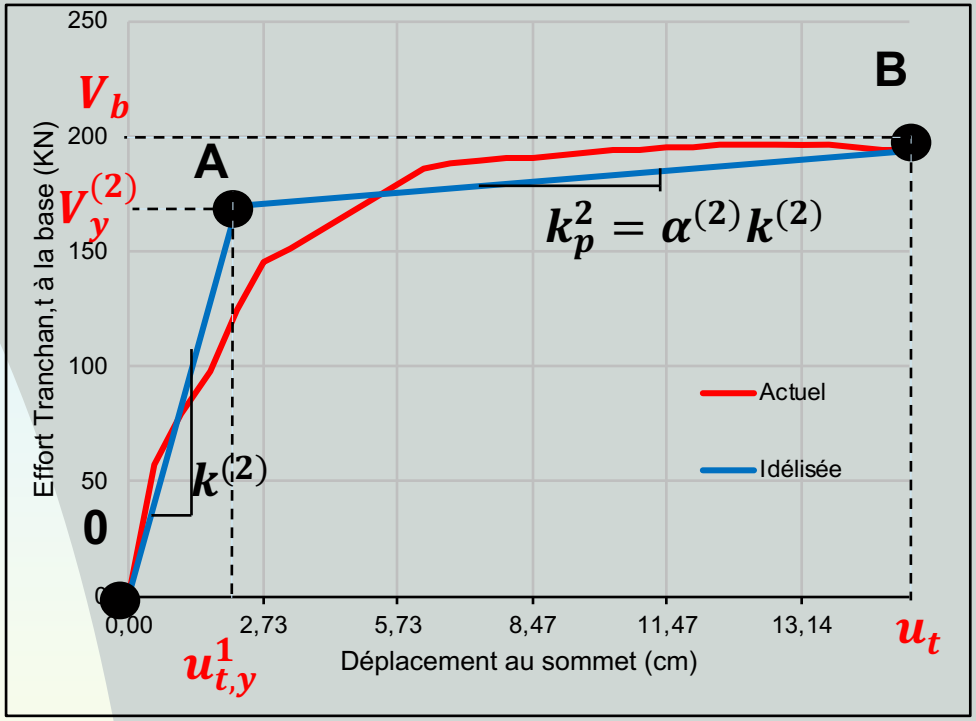
On trace les droites « OA » et « AB »



© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

7. Calculer le coefficient « α^2 » de la rigidité plastique.

Entre « A » et « B », on peut calculer la pente

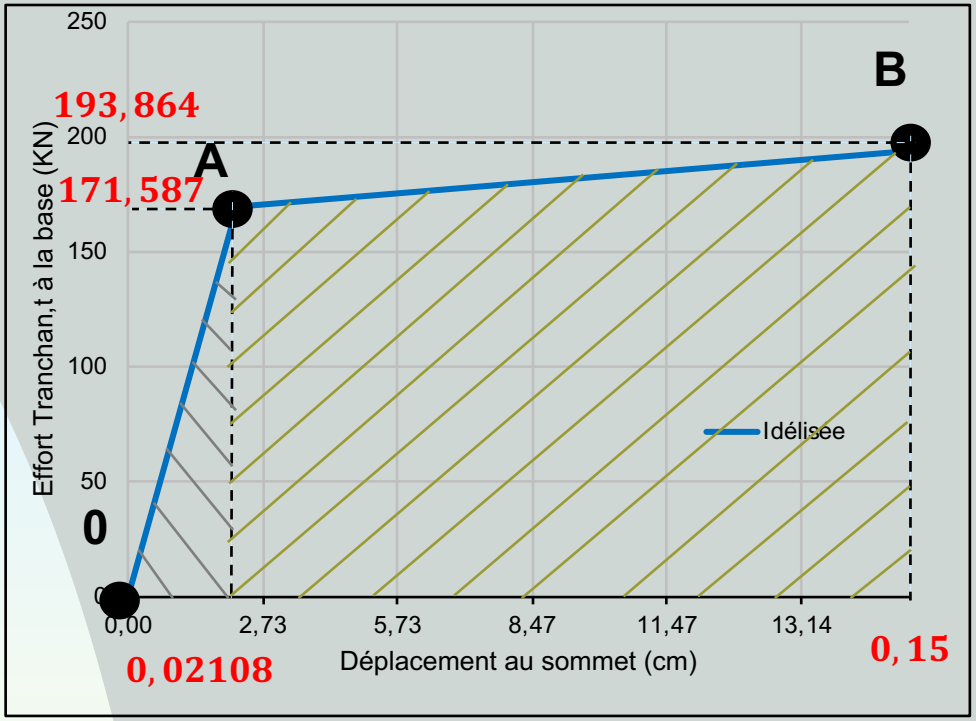


$$\alpha^{(2)} = \frac{\left[\left(\frac{V_b}{V_y^2}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{u_t}{u_{t,y}^2}\right) - 1\right]} = \frac{\left[\left(\frac{193,864}{171,587}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{0,15}{0,02108}\right) - 1\right]} = 0,02123$$

$$\alpha^{(2)} = 0,02123$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

8. Calculer l'aire sous la courbe idéalisée « $A_{id}^{(2)}$ ».



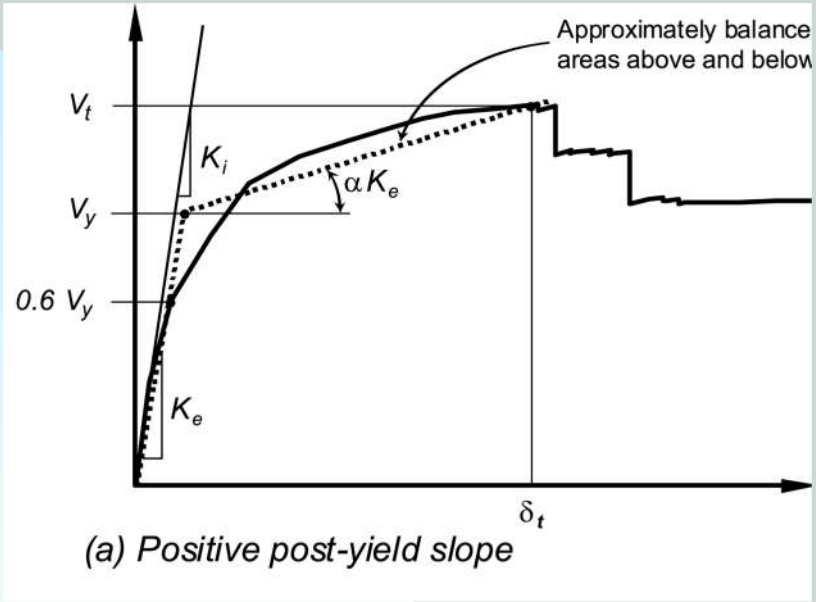
$$A_{id}^{(2)} = \frac{\left[u_{t,y}^{1}\ x\ V_{y}^{1}\right]}{2} + \frac{\left[\left(V_b + V_{y}^{1}\right)\ x\ \left(u_t - u_{t,y}^{1}\right)\right]}{2}$$

$$A_{id}^{(2)} = \frac{[0,02108\ x\ 171,587]}{2} + \frac{[(193,864 + 171,587)\ x\ (0,15 - 0,02108)]}{2}$$

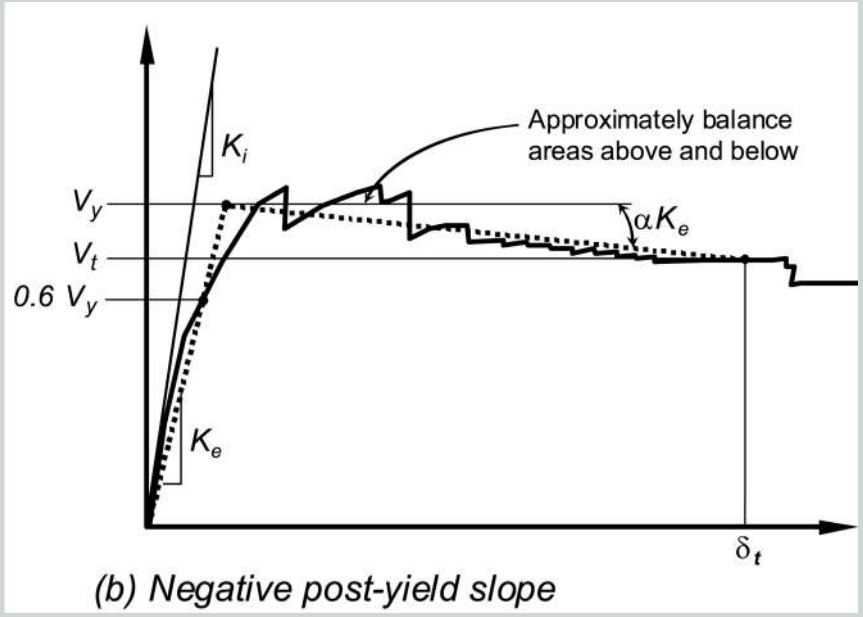
$$A_{id}^{(2)} = 25,365\ m^2$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

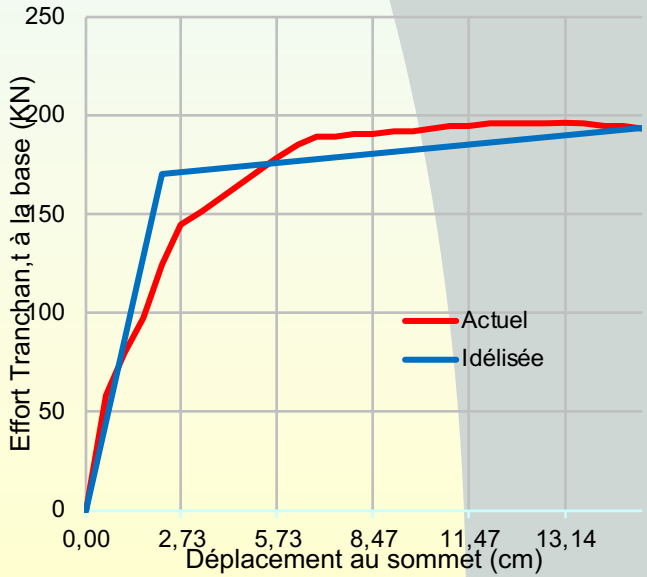
9. Calcul de l'erreur entre les 02 surfaces « A_{actuel} » et « $A_{id}^{(2)}$ ».



(a) Positive post-yield slope



(b) Negative post-yield slope



$$erreur = 100\ x\ \frac{\left[A_{id}^{(2)} - A_{actuel}\right]}{A_{actuel}}$$

$$erreur = 100\ x\ \frac{[25,365 - 25,289]}{25,289}$$

$$erreur = 0,30\ \%$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

9. Calcul de l'erreur entre les 02 surfaces « A_{actuel} » et « A_{id}^{1} ».

Comparer l'erreur avec la tolérance fixée. Soit Tol= 0,01 %

Notre cas

$$erreur = 0,30\ \% > \text{Tol= 0,01 \%}$$

On va vers la 3ème itération, avec

$$V_y^{(3)} = 171,585x\left(\frac{25,289}{25,365}\right) = 171,071\ KN$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Itération 3

$$V_y^{(3)} = 171,071\ KN$$

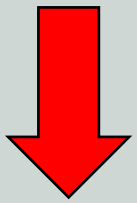
… Jusqu’à convergence

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Finalement

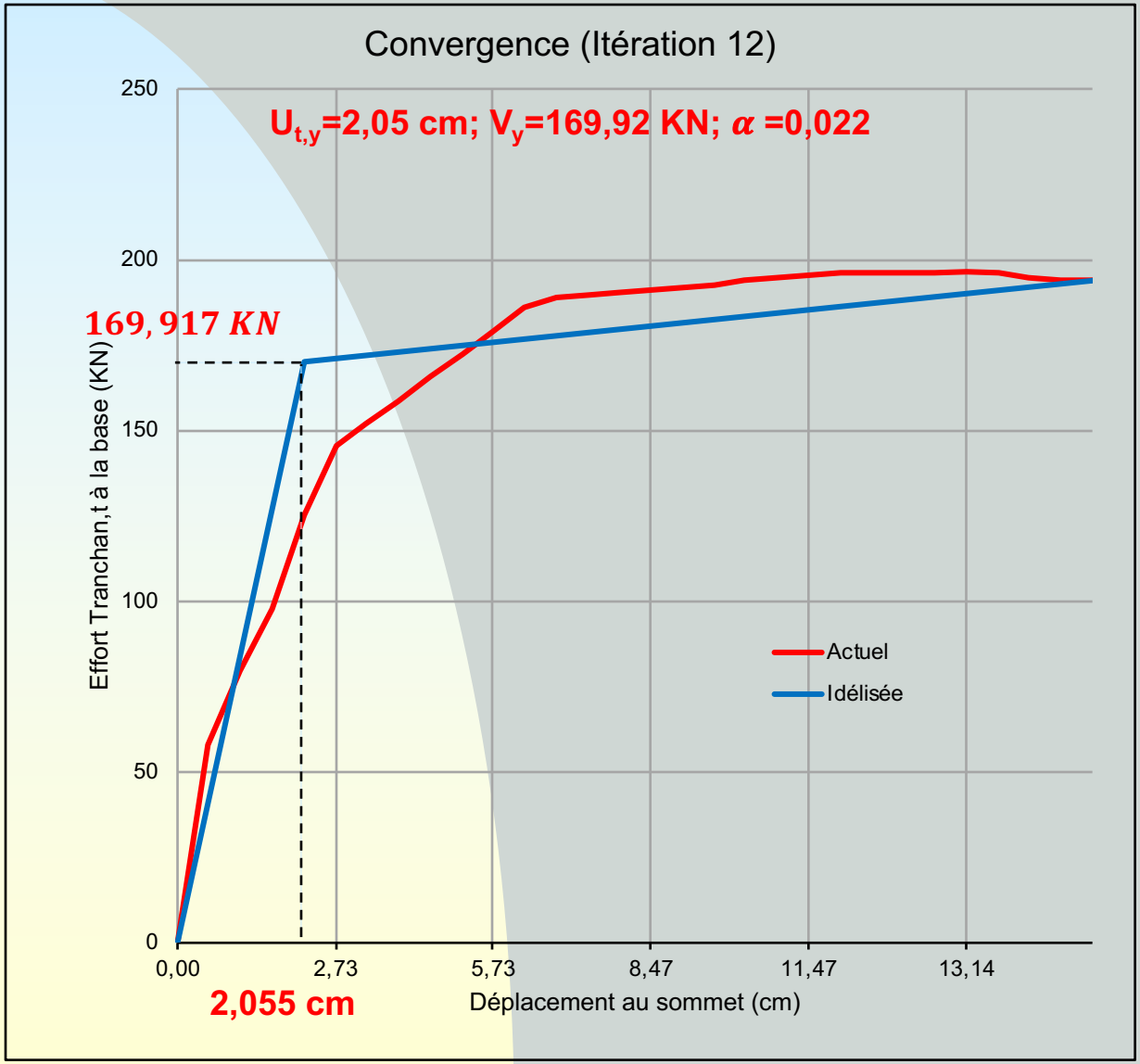
Convergence, après 12 itérations

Itération	$V_y^{(i)}$ (KN)	0,6x$V_y^{(i)}$ (KN)	$u_{t,0,6}^{(i)}$ (m)	K(i)	$u_{t,y}^{(i)}$ (m)	$\alpha^{(i)}$	$A_{id}^{(i)}$ (m²)	Erreur (%)r
1	172,337	103,402	0,01279	8085,326	0,02131	0,02069	25,399	0,435
2	171,591	102,954	0,01265	8139,843	0,02108	0,02123	25,366	0,303
3	171,072	102,643	0,01255	8178,486	0,02092	0,02159	25,343	0,212
4	170,710	102,426	0,01248	8205,784	0,02080	0,02184	25,326	0,148
5	170,457	102,274	0,01243	8225,023	0,02072	0,02201	25,315	0,104
6	170,280	102,168	0,01240	8238,558	0,02067	0,02213	25,307	0,073
7	170,157	102,094	0,01238	8248,069	0,02063	0,02222	25,302	0,051
8	170,070	102,042	0,01236	8254,748	0,02060	0,02228	25,298	0,036
9	170,010	102,006	0,01235	8259,434	0,02058	0,02232	25,295	0,025
10	169,967	101,980	0,01234	8262,721	0,02057	0,02235	25,293	0,017
11	169,938	101,963	0,01234	8265,026	0,02056	0,02236	25,292	0,012
12	169,917	101,950	0,01233	8266,642	0,02055	0,02238	25,291	**0,009**



© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Finalement



$$u_{t,y}^{(12)} = 0,02055\ m;$$
$$V_y^{(12)} = 169,917\ KN$$
$$\alpha^{(12)} = 0,02238$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Merci. **Fin de l'Application 18**

© Abdellatif MEGNOUNIF FTTlemcen