Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Application 15

Vibrations Forcées

Analyse Spectrale et Statique équivalente

Exemple 15 **Dimanche 21.01.2024**

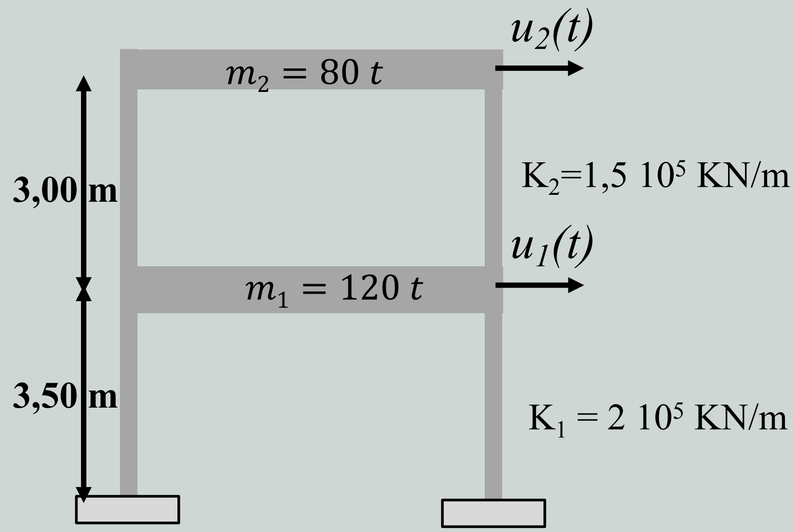
Objectif

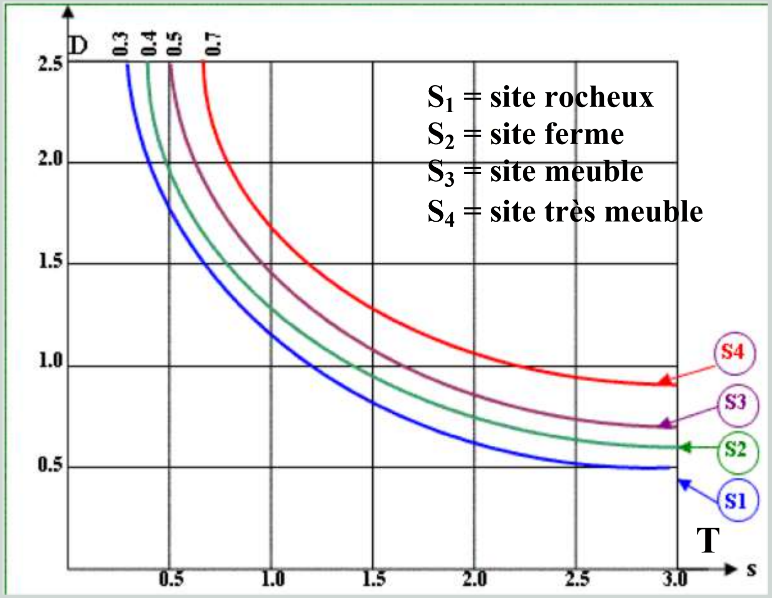
Le but de cette application est de :

- **Calculer les réponses dynamiques d’un SPDDL pour des systèmes amortis ou non amortis**
- **Utilisation de la méthode statique équivalente et la méthode spectrale.**
- **Comparaison des 02 méthodes en calculant les efforts à la base.**

Exemple 1 Même exemple que celui de l'application 14)

On donne le portique à 02 niveaux montré en figure ci-contre. La structure sera construite dans une zone sismique où le coefficient d'accélération A=0,10. Le facteur de comportement R=5 et le facteur de qualité Q=1,25. Le coefficient d'amplification dynamique D(T) est celui du RPA donné en figure pour les sols fermes. Prendre $\xi = 5\ \%$





i) Calculer les fréquences et modes propres de vibration.
ii) Calculer les efforts maxima induits par le séisme en utilisant la méthode spectrale avec superposition des 02 modes. Le spectre de pseudo-accélération des RPA sera utilisé.
iii) Recalculer les efforts maxima induits par le séisme en utilisant la méthode statique équivalente.
iv) Comparer les 02 méthodes.
v) Utiliser les efforts calculés pour vérifier la stabilité au renversement du portique

Solution

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g}$$

U: déplacement relatif

On découple avec $\boldsymbol{U = \Phi\,Y}$ **alors** $\boldsymbol{\ddot{U} = \Phi\ddot{Y}}$

$$\ddot{y}_n + \boldsymbol{2\xi_n\omega_n\dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2}y_n = \frac{P_n}{M_n} = -\phi_n^T\boldsymbol{M}\{\Delta\}\ddot{u}_g \qquad \textbf{(1)}$$

Avec :

$$p(t) = -\boldsymbol{M}\ddot{U}_g \qquad P_n = \phi_n^T p(t)$$

$$M_n = \phi_n^T M\phi_n \qquad C_n = \phi_n^T C\phi_n \qquad K_n = \phi_n^T K\phi_n \qquad P_n = \phi_n^T p(t)$$

$$\frac{C_n}{M_n} = \boldsymbol{2\xi_n\omega_n} \quad \textbf{et} \quad \frac{K_n}{M_n} = \boldsymbol{\omega_n^2}$$

$$\ddot{y}_n + \boldsymbol{2\xi_n\omega_n\dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2}y_n = -\Gamma_n\,\ddot{u}_g$$

Avec :

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T\boldsymbol{M}\{\Delta\}}{\phi_n^T\boldsymbol{M}\emptyset_n} = \frac{L_n}{M_n} \qquad L_n = \phi_n^T\boldsymbol{M}\{\Delta\} \qquad M_n = \phi_n^T\boldsymbol{M}\emptyset_n$$

Soit, par exemple pour des CI nulles et système amorti

$$y_j(t) = -\frac{\Gamma_j}{m_j\omega_{aj}}\int_0^{\mathrm{t}} \ddot{u}_g(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{e}^{-\xi\boldsymbol{\omega_j(t-\tau)}}sin\big(\omega_{aj}(t-\tau)\big)d\boldsymbol{\tau}$$

Calcul des valeurs maximales de la réponse

i. Valeur maximale par mode

On rappelle le spectre de réponse en déplacement :

$$S_D(\omega_j, \xi_j) = max\left[-\frac{\Gamma_j}{m_j\omega_{aj}}\int_0^t \ddot{u}_g(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{e}^{-\xi\omega_j(t-\boldsymbol{\tau})} sin\big(\omega_{aj}(t-\tau)\big)d\boldsymbol{\tau}\right]$$

On peut aussi avoir le spectre de réponse en pseudo-accélération

$$S_A(\omega_j, \xi_j) = \omega_j^2\, S_D(\omega_j, \xi_j) \qquad \textbf{(15)}$$

$$y_{jmax} = \boldsymbol{\Gamma_j\, S_D(\omega_j, \xi_j) = \frac{\Gamma_j}{\omega_j^2}\, S_A(\omega_j, \xi_j) = \frac{L_j}{M_j\omega_j^2}\, S_A(\omega_j, \xi_j) =}$$

$$L_j = \phi_j^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}$$

Le déplacement maximal sera alors (9): (Si les temps sont les mêmes)

$$\boldsymbol{U_{jmax}} = \phi_j y_{jmax} = \boldsymbol{\Gamma_j\, \phi_j\, S_D(\omega_j, \xi_j) = \frac{\Gamma_j}{\omega_j^2}\phi_j\, S_A(\omega_j, \xi_j)}$$

Et l'effort maximal sera alors :

$$\boldsymbol{F_{kjmax}} = \Gamma_j\, \omega_j^2\, M\, \phi_j S_D(\omega_j, \xi_j) = \boldsymbol{\Gamma_j\, M\, \phi_j\, S_A(\omega_j, \xi_j)}$$

Calcul des valeurs maximales de la réponse

Si les temps ne sont pas les mêmes

Une fois les réponses maximales par mode sont calculées, on calcul la réponse maximale totale par superposition

(AVS).

$$u_{imax} = \sum_{j=1}^{n} \left|\Gamma_j \phi_{ij} S_{Dj}\right|$$

$$\ddot{u}_{imax} = \sum_{j=1}^{n} \left|\Gamma_j \phi_{ij} S_{Aj}\right|$$

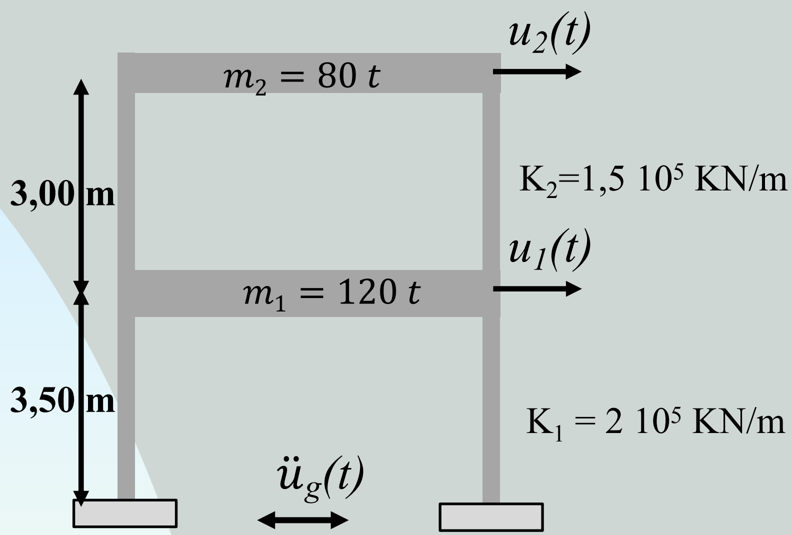
(SRSS).

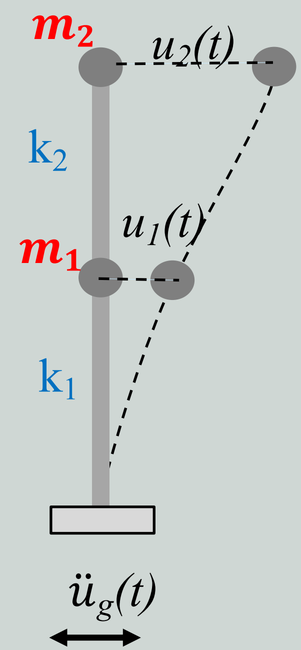
$$u_{imax} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Gamma_j \phi_{ij} S_{Dj}\right)^2}$$

$$\ddot{u}_{imax} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Gamma_j \phi_{ij} S_{Aj}\right)^2}$$

Solution

Notre cas ?



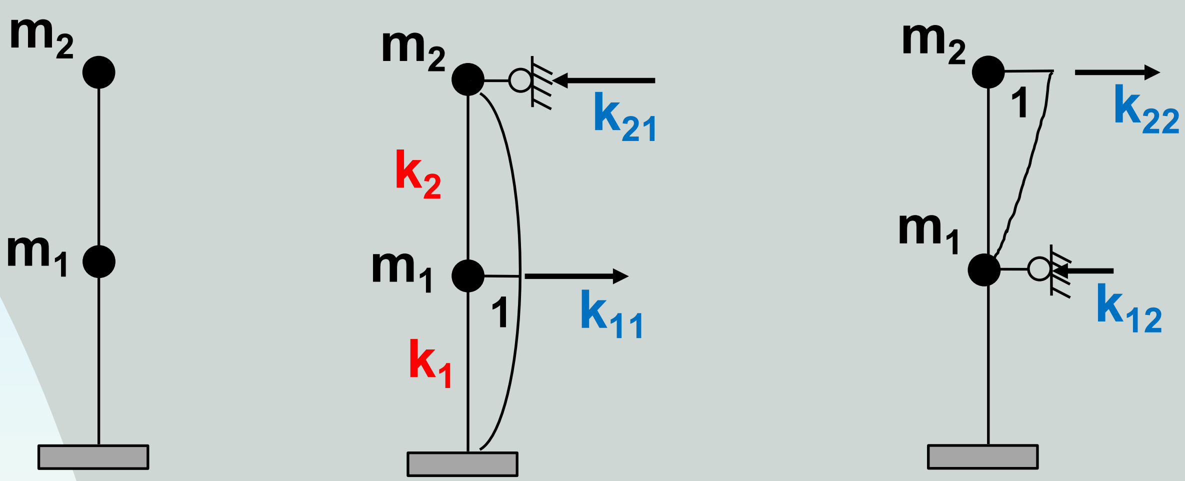


- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.**

Solution

Matrices ? (Attention à l'ordre de la numérotation)

Rigidité ?



$k_{11} = k_1 + k_2$

$k_{12} = -k_2$

$k_{21} = -k_2$

$k_{22} = k_2$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\,105 + 1,5\,105 & -1,5\,105 \\ -1,5\,105 & 1,5\,105 \end{bmatrix} KN/m = \begin{bmatrix} 3,5 & -1,5 \\ -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} 105\ KN/m$$

Masse ?

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} (t)$$

Solution

La méthode spectrale ?

Solution

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

$$\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = 0$$

D'où : $\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 3{,}5\ 10^5 - \lambda\ \ 120 & -1{,}5\ 10^5 \\ -1{,}5\ 10^5 & 1{,}5\ 10^5 - \lambda\ \ 80 \end{vmatrix} = 0$ Avec « $\lambda = \omega_i^2$ »

Solutions :

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 778{,}732$ **D'où :** $\omega_1 = 27{,}906\ \frac{rd}{s}$ $T_1 = 0{,}225\ s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 4012{,}935$ **D'où :** $\omega_2 = 63{,}348\ \frac{rd}{s}$ $T_2 = 0{,}099\ s$

Modes propres ?

Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$

i. $\omega_i = \omega_1 = 27{,}906\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 3{,}5\ 10^5 - 778{,}732\ \ 120 & -1{,}5\ 10^5 \\ -1{,}5\ 10^5 & 1{,}5\ 10^5 - 778{,}732\ 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0,5847} \\ \boldsymbol{1,0} \end{Bmatrix}$$

ii. $\omega_i = \omega_2 = 63{,}348\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 3{,}5\ 10^5 - 4012{,}935\ 120 & -1{,}5\ 10^5 \\ -1{,}5\ 10^5 & 1{,}5\ 10^5 - 4012{,}935\ 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{\boldsymbol{\phi_2}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-0,877} \end{Bmatrix}$$

Equation du mouvement

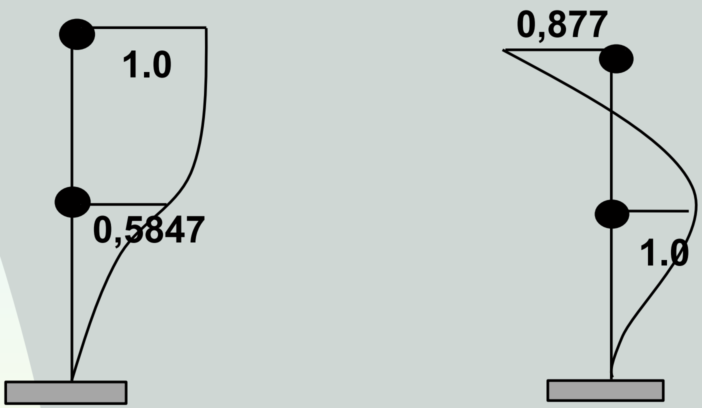
Ainsi

Mode 1

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5847 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$$

Mode 2

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,877 \end{Bmatrix}$$



Finalement **Matrice spectrale**

$$\Omega = \begin{bmatrix} 27,906 & 0 \\ 0 & 63,348 \end{bmatrix}$$

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,5847 & 1 \\ 1 & -0,877 \end{bmatrix}$$

Rappel Spectre RPA

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25\,A\left(1+\frac{T}{T_1}\left(2.5\eta\frac{Q}{R}-1\right)\right) & 0 \le T \le T_1 \\ 2.5\eta(1.25A)\left(\frac{Q}{R}\right) & T_1 \le T \le T_2 \\ 2.5\eta(1.25A)\left(\frac{Q}{R}\right)\left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3} & T_2 \le T \le 3.0\ s \\ 2.5\eta(1.25A)\left(\frac{Q}{R}\right)\left(\frac{T_2}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{3}{T}\right)^{5/3} & T > 3.0s \end{cases}$$

Avec:

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \ge 0.7 \qquad \xi : en\ \%$$

T_1 et T_2: **périodes caractéristiques associées à la catégorie du site**

Site	S_1	S_2	S_3	S_4
T_1	0,15	0,15	0,15	0,15
T_2	0,30	0,40	0,50	0,70

Solution

Valeur maximale par spectre:

$$y_{jmax} = \Gamma_j S_D(\omega_j, \xi_j) = \frac{\Gamma_j}{\omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j) = \frac{L_j}{M_j \omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j)$$

Avec $L_j = \phi_j^T M\{\Delta\}$

Mode 1

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 778{,}732$

$$M_1 = \{0{,}5847 \quad 1{,}0\} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}5847 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 121{,}025\ (t)$$

$$L_1 = \{0{,}5847 \quad 1{,}0\} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 150{,}164\ (t)$$

$S_A(\omega_j, \xi_j)$???

Sol ferme (S2) → $T_1 = 0{,}15$ et $T_2 = 0{,}40$ **avec** $T_1 \leq T_{mode1} = 0{,}225\, s \leq T_2$

D'où

$$\frac{S_a}{g} = 2{,}5\eta(1{,}25A)\left(\frac{Q}{R}\right) = 2{,}5\ 1\ (1{,}25\ 0{,}1)\left(\frac{1{,}25}{5}\right)$$

Avec $\xi = 5\ \%$; $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} = 1.0$

$S_A = 0{,}078\ g$

$$y_{1max} = \frac{L_j}{M_j \omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j) = \frac{150{,}164}{121{,}025\ 778{,}732}\ 0{,}078\ g$$

$$y_{1max} = 1{,}219\ mm$$

Solution

Valeur maximale par spectre:

Avec

$$y_{jmax} = \Gamma_j S_D(\omega_j, \xi_j) = \frac{\Gamma_j}{\omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j) = \frac{L_j}{M_j \omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j)$$

$$L_j = \phi_j^T M\{\Delta\}$$

Mode 2 $\lambda_2 = \omega_2^2 = 4012{,}935$

$$M_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}877\} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}877 \end{Bmatrix} = 181{,}53\ (t)$$

$$L_2 = \{1{,}0 \quad -0{,}877\} \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix} = 49{,}84\ \ (t)$$

$S_A(\omega_j, \xi_j)$???

Sol ferme (S2) $\Rightarrow$ $T_1 = 0,15$ et $T_2 = 0,40$ **avec** $0 \le T_{mode2} = 0{,}099\, s \le T_1$

D'où

$$\frac{S_a}{g} = 1,25\, A \left(1 + \frac{T}{T_1}\left(2,5\eta \frac{Q}{R} - 1\right)\right) = 1,25\ 0,1 \left(1 + \frac{0,099}{0,15}\left(2,5\ 1,0\ \frac{1,25}{5} - 1\right)\right)$$

Avec $\xi = 5\ \%$; $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} = 1.0$

$S_A = 0{,}094\ g$

$$y_{2max} = \frac{L_j}{M_j \omega_j^2} S_A(\omega_j, \xi_j) = \frac{49,84}{181,53\ \ 4012{,}935}\ 0,094\ g$$

$$y_{2max} = 0{,}063\ \ mm$$

Solution $y_{1max} = 1,219\ mm$ $y_{2max} = 0,063\ mm$ $\Phi = \begin{bmatrix} 0,5847 & 1 \\ 1 & -0,877 \end{bmatrix}$

Cas 2 En considérant les 02 modes

Méthode SRSS : $u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1}y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2}y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii}y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in}y_{nmax})^2}$

$$\begin{Bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(\emptyset_{11}y_{1max})^2 + (\emptyset_{12}y_{2max})^2} \\ \sqrt{(\emptyset_{21}y_{1max})^2 + (\emptyset_{22}y_{2max})^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(0,5847\ 1,219)^2 + (1\ (0,063))^2} \\ \sqrt{(1\ 1,219)^2 + (0,063\ (-0,877))^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,716 \\ 1,22 \end{Bmatrix} (mm)$$

$F_s = K\ U = K\Phi\ Y = \omega_i^2 M\Phi\ Y$ $\{F_s\} = \begin{bmatrix} 3,5 & -1,5 \\ -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} 10^5 \begin{Bmatrix} 0,716 \\ 1,22 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 67,6 \\ 75,6 \end{Bmatrix} (KN)$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 67,6 + 75,6 = 143,2\ KN$$

Le moment de flexion

$$\{M_f\} = F_{s1}\,h1 + F_{s2}\,h2$$

$$M_f = 67,6\ \ 3,5 + 75,6\ \ 6,5 = 728\ KN.m$$

Solution

La méthode statique équivalente ?

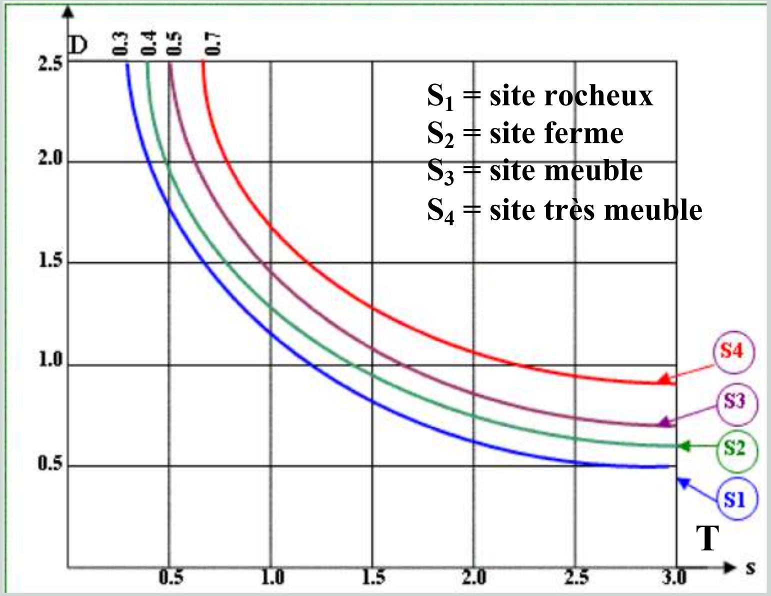
Solution

Force sismique totale à la base

$$V = \frac{A\,D\,Q}{R}\,W$$

Avec D ??? (correspondant à la période fondamentale)

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \le T \le T_2 \\ 2.5\eta\left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3} & T_2 \le T \le 3.0\,s \\ 2.5\eta\left(\frac{T_2}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{3}{T}\right)^{5/3} & T > 3.0s \end{cases}$$



Sol ferme (S2) → $T_1 = 0,15$ et $T_2 = 0,40$

avec $0 \le T_{mode1} = 0{,}225\,s \le T_2$

D'où $D = 2.5\eta = 2,5$

$$V = \frac{0,1\;2,5\;1,25}{5}\,(120+80)\,9,81 = 122,625\;KN$$

Solution

Distribution suivant la hauteur

$$V = F_t + \sum F_i$$

F_t Pour tenir compte de l'influence des modes supérieurs

Avec $F_t = 0,07\,T\,V \leq 0,25\,V$ **Pour :** $T \geq 0,7\,s$

$F_t = 0$ **Pour :** $T \leq 0,7\,s$ $T_{mode1} = 0{,}225\,s$

et $$F_i = \frac{(V - F_t)W_i h_i}{\sum_{j=1}^{n} W_j h_j}$$

avec $W_1 = 120\ 9,81 = 1177,2\,KN$ $h_1 = 3,5\,m$

$W_2 = 80\ 9,81 = 784,8\,KN$ $h_2 = 6,5\,m$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j h_j = 1177,2\ 3,5 + 784,8\ 6,5 = 9221,4\,KN.m$$

$$F_1 = \frac{(V - F_t)W_1 h_1}{\sum_{j=1}^{n} W_j h_j} = \frac{(122,625 - 0)\ \ 1177,2\ 3,5}{9221,4} = 54,79\,KN$$

$$F_2 = \frac{(V - F_t)W_2 h_2}{\sum_{j=1}^{n} W_j h_j} = \frac{(122,625 - 0)\ \ 784,8\ 6,5}{9221,4} = 67,835\,KN$$

Solution

$$F_1 = 54,79\ KN \qquad F_2 = 67,835\ KN$$

Le moment de flexion $\{M_f\} = F_{s1}\,h_1 + F_{s2}\,h_2$

$$M_f = 54,79 \quad 3,5 + 67,835 \quad 6,5 = 632,693\ KN.m$$

Récapitulatif

	F_1(KN)	F_2(KN)	V(KN)	M_f(KN.m)
M. Spectrale	67,6	75,6	143,2	728
MSE (RPA)	54,79	67,835	122,625	632,693

Comparaison

- **MSE : 01 seul mode et Spectrale : 02 modes. ⇒ Spectrale > MSE**
- **1er mode contribue à 85%**
- **La différence dans les forces entre les 02 est équilibré par le comportement ductile qui est fourni par les détails de construction de l'élément.**
- **C'est pour cela que l'utilisation de la MSE ne peut être dissociée de l'application rigoureuse des dispositions constructives garantissant à la structure:**
  - **Une ductilité suffisante**
  - **La capacité de dissiper l'énergie vibratoire transmise à la structure par des secousses sismiques majeurs.**

Merci. Fin de l'Application 15