# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr**

## Chap. 9

# Mouvement libre non amorti des SPDD

***COURS 9*** **Dimanche 15.01.2023**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

# 1. Introduction

- Négliger l'amortissement
- Force extérieure nulle
- Structure idéale (Théorique). Elle vibre indéfiniment.
- En réalité, toute structure a un système de frottement pour l'amortir dans le temps.
- Vibration qui dépend de la distribution des masses, de la loi charge-déplacement et de la manière dont la vibration est produite initialement.
- On peut imposer des CI non nulles de tel sorte à faire vibrer la structure selon un quelconque mode normal.
- Dans chaque mode normal, propre ou naturel, chaque point de la structure exécute un mouvement sinusoïdale autour de sa position d'équilibre.
- Tous les points passent simultanément par une position d'équilibre et par leur amplitude maximale.
- La fréquence de vibration est donc la même pour tous les points de la structure (fréquence propre au mode considéré)

- Lorsque tous les points atteignent leur maximum, la déformée caractérise un mode normal de vibration.
- La fréquence la plus petite est appelée fréquence fondamentale.
- En théorie, les problèmes seront résolus en considérant le principe de superposition des modes normaux.
- Les modes normaux sont la base de la résolution des systèmes forcés.
- Le nombre de mode propre sera égale au nombre total des DDL.

Ainsi, le mouvement libre non amorti n'est utile que pour la détermination des caractéristiques propres du système:

**Pulsations et modes propres de vibration**

02 méthodes pour les calculer:

- Méthode de la matrice de rigidité
- Méthode de la matrice de flexibilité

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

# 2. Méthode de la matrice de rigidité

**Rappel : Eq., de mouvement d'un SPDDL (8.12)**

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = P(t)}$$

**Pour les mouvements libre non amorti, on aura:**

$$\boldsymbol{M\,\ddot{U} + K\,U = 0} \qquad (9.1)$$

**Avec**

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}_{(nxn)} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}_{(nxn)} \quad \ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}_{(nx1)} \quad U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}_{(nx1)}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

$$M\,\ddot{U} + K\,U = 0$$

**Une solution particulière de ce système est (voir les S1DDL) :**

$$U = \begin{Bmatrix} u_1(t) = \phi_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (9.2)$$

**D'où:**

$$\ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (9.3)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## Méthode de la matrice de rigidité

$$M\ddot{U} + KU = 0$$

$$U = \begin{Bmatrix} u_1(t) = \phi_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \quad \ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix}$$

**En remplaçant (9.2) et (9.3) dans (9.1), on aura:**

$$\begin{Bmatrix} (k_{11} - m_1\omega^2)\phi_1 + k_{12}\phi_2 + \cdots + k_{1n}\phi_n = 0 \\ k_{21}\phi_1 + (k_{22} - m_2\omega^2)\phi_2 + \cdots + k_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1}\phi_1 + ki_2\phi_2 + \cdots (kii - mi\omega^2)\phi_i .. + kin\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\phi_1 + kn_2\phi_2 + \cdots + (knn - mn\omega^2)\phi_n = 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(9.4)}$$

**Sous forme matricielle:**

$$(K - \omega^2 M)\{\phi\} = 0 \qquad \textbf{(9.5)}$$

**Comme. $\{\phi\} \neq 0$, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :**

$$\det|K - \omega^2 M| = 0 \qquad \textbf{(9.6)}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

$$\boldsymbol{det|K - \omega^2 M| = 0} \qquad (9.6)$$

« M » et « K » sont définies positives, d'où l'équation (9.6) admet « n » racines réelles « $\omega_i^2$ ».

En posant « $\lambda = \omega_i^2$ », (9.6) s'écrit : $\boldsymbol{p(\lambda) = 0}$ appelée équation caractéristiques, polynôme de degré « n ».

« n » solutions « $\omega_i$ » appelées **pulsations propres**.

Et $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ **fréquences propres** (9.7)

Soit:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_i < \ \ldots \lambda_n$$

Ou:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_i < \ \ldots \omega_n \qquad (9.8)$$

La plus petite «$\omega_1$ » est appelée **pulsation fondamentale**.

Et «$f_i = \frac{\omega_1}{2\pi}$ » est appelée **fréquence fondamentale**.

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Méthode de la matrice de rigidité

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0 \qquad (9.5)$$

**En remplaçant chaque valeur de « $\omega_i$ » dans (9.5) (ou 9.4), on trouvera un vecteur $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ définissant une forme de d'oscillation.**

**Le couple « $\omega_i$ , $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ » est appelé mode propre ou normal de vibration.**

**Ainsi pour « $\omega_i$ », on aura:**

$$\left\{\begin{array}{c} (k_{11} - m_1\omega_i^2)\,\phi_1 + k_{12}\phi_2 + \cdots + k_{1n}\phi_n = 0 \\ k_{21}\phi_1 + (k_{22} - m_2\omega_i^2)\,\phi_2 + \cdots + k_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1}\phi_1 + ki_2\phi_2 + \cdots (kii - mi\omega_i^2)\phi_i .. + kin\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\phi_1 + kn_2\phi_2 + \cdots + (knn - mn\omega_i^2)\phi_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (9.9)$$

**Puisque le déterminant (9.6) est nul, $\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}| = 0$, il s'en suit que le système (9.9) admet seulement « n-1 » équations actives (Une des équations ne rapport rien).**

**Dans ce cas, $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ ne peut être déterminé que sous forme de rapport.**

**Exemple, on suppose que $\boldsymbol{\phi}_{i1} = 1$ et on calcule les autres composantes en fonction de $\boldsymbol{\phi}_{i1}$.**

**Généralement, on choisit la plus grande valeur des composantes de $\{\boldsymbol{\phi i}\}$ et on exprime les autres composantes par rapport à cette valeur.**

$$\phi_{k,\,i} = \frac{\phi_k^{(i)}}{\phi_{max}^{(i)}}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Ainsi la solution générale du système (9.5) sera:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_i\} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \tag{9.10}$$

$\varphi_i$ sont déterminées par les conditions initiales et $\{\phi_i\}$ sont définies à un multiplicateur près.

A la fin, on obtient 02 matrices (objectif du mouvement libre non amorti)

**Matrice spectrale**

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

(9.11)

**Matrice Modale**

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1i} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2i} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{ii} & \dots & \phi_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{ni} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

(9.12)

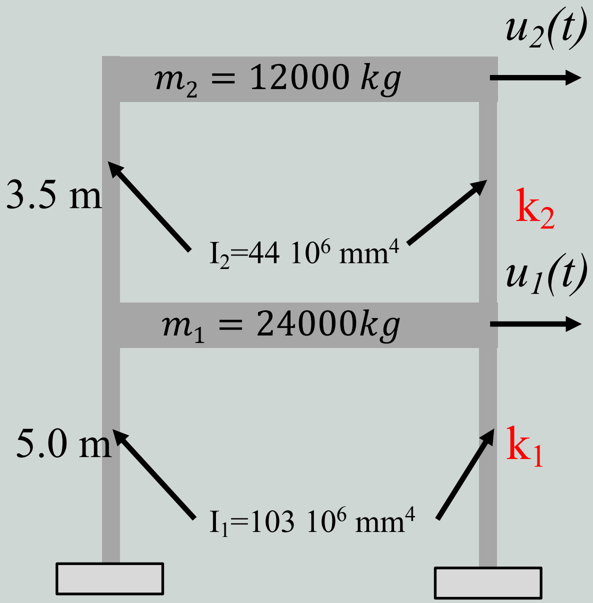
© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

# Exemple 1

**Considérons le portique à 02 étages de la figure ci-contre avec les données mentionnées. En supposant que l'amortissement est négligé,**

**i) Déterminer les périodes et modes propres de vibration.**

**E = 200 000 N/mm$^2$**




- **Poutre très rigide.**
- **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.**

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## Equation du mouvement

**Matrices ?**

**Rigidité :** $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ **Masse :** $M = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix}$

**AN :**

$$k_1 = 2\frac{12\,EI}{L^3} = 2\frac{12\,(200000)(103\;10^6)}{5000^3} \qquad k_1 = 3{,}96\;10^6\;N/m$$

$$k_2 = 2\frac{12\,EI}{L^3} = 2\frac{12\,(200000)(44\;10^6)}{3500^3} \qquad k_2 = 4{,}93\;10^6\;N/m$$

**Ainsi, on résout (9.6)** $\boldsymbol{det|K - \omega^2 M| = 0}$

**Posons «** $\lambda = \omega_i^2$ **», on aura**

$$\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 8.89\;10^6 - 24\lambda\;10^3 & -4{,}93\;10^6 \\ -4{,}93\;10^6 & 4{,}93\;10^6 - 12\lambda\;10^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(8.89\;10^6 - 24\lambda\;10^3)(4{,}93\;10^6 - 12\lambda\;10^3) - (-4{,}93\;10^6)(-4{,}93\;10^6) = 0$$

**Solutions :**

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 99.4$ **D'où :** $\omega_1 = 10\;rd/s$ **et** $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.63\;s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 681$ **D'où :** $\omega_1 = 26\;rd/s$ **et** $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.24\;s$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## Modes propres ?

**Pour chaque** $\omega_i$ **on résout le système** $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$

*i.* $\omega_i = \omega_1 = 10\, rd/s$

$$\begin{bmatrix} 8.89\ 10^6 - 24(99.4)\ 10^3 & -4{,}93\ 10^6 \\ -4{,}93\ 10^6 & 4{,}93\ 10^6 - 12(99.4)\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

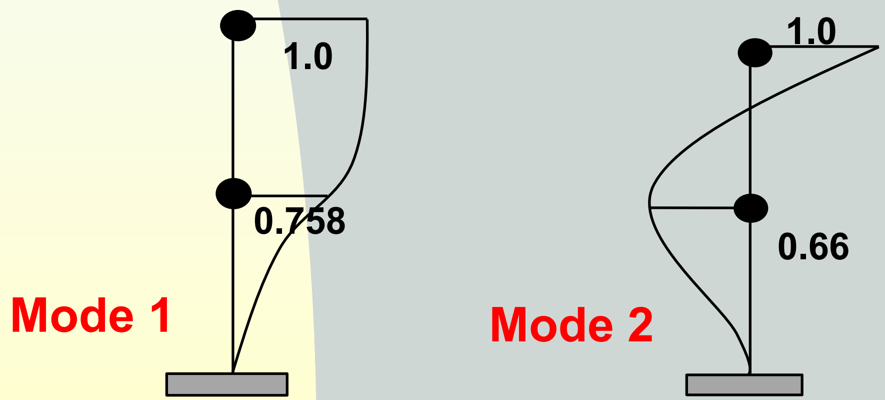
**En posant** $\boldsymbol{\phi_{21}} = \mathbf{1}$**, on aura** $\boldsymbol{\phi_{11}} = \mathbf{0.758}$

*ii.* $\omega_i = \omega_1 = 26\, rd/s$

$$\begin{bmatrix} 8.89\ 10^6 - 24(681)\ 10^3 & -4{,}93\ 10^6 \\ -4{,}93\ 10^6 & 4{,}93\ 10^6 - 12(681)\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

**En posant** $\boldsymbol{\phi_{22}} = \mathbf{1}$**, on aura** $\boldsymbol{\phi_{12}} = \mathbf{-0.66}$

**D'où**




© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

# 3. Méthode de la matrice de flexibilité

On aura pour les mouvements libre non amorti

$$M\,\ddot{U} + K\,U = 0$$

D'où $U = -K^{-1} M\,\ddot{U}$

Posons : $f = K^{-1}$ et $I = -\,M\,\ddot{U}$

D'où

$$\color{red}{U} = \begin{cases} u_1(t) = I_1 f_{11} + I_2 f_{12} + \cdots + Iif_{1i} + \cdots + Inf_{1n} \\ u_2(t) = I_1 f_{21} + I_2 f_{22} + \cdots + Iif_{2i} + \cdots + Inf_{2n} \\ \vdots \\ u_i(t) = I_1 f_{i1} + I_2 f_{i2} + \cdots + Iifii + \cdots + Infin \\ \vdots \\ u_n(t) = I_1 f_{n1} + I_2 f_{n2} + \cdots + Iifni + \cdots + Infnn \end{cases} \qquad (9.13)$$

Soit

$$\begin{cases} 0 = -u_1(t) - m_1\ddot{u}_1 f_{11} - m_2\ddot{u}_2 f_{12} - \cdots - m_i\ddot{u}_i f_{1i} - \cdots - m_n\ddot{u}_n f_{1n} \\ 0 = -u_2(t) - m_1\ddot{u}_1 f_{21} - m_2\ddot{u}_2 f_{22} - \cdots + m_i\ddot{u}_i f_{2i} - \cdots - m_n\ddot{u}_n f_{2n} \\ \vdots \\ 0 = -u_i(t) - m_1\ddot{u}_1 f_{i1} - m_2\ddot{u}_2 f_{i2} - \cdots - m_i\ddot{u}_i f_{ii} - \cdots - m_n\ddot{u}_n f_{in} \\ \vdots \\ 0 = -u_n(t) - m_1\ddot{u}_1 f_{n1} - m_2\ddot{u}_2 f_{n2} - \cdots - m_i\ddot{u}_i f_{ni} - \cdots - m_n\ddot{u}_n f_{nn} \end{cases} \qquad (9.14)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

$$M\,\ddot{U} + K\,U = 0$$

**Une solution particulière du système (9.14) est :**

$$U = \begin{Bmatrix} u_1(t) = \phi_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (9.15)$$

**D'où:**

$$\ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) = -\,\phi_1\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\,\phi_2\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\,\phi_i\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\,\phi_n\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad (9.16)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## Méthode de la matrice de flexibilité

$$F\,M\,\ddot{U} + U = 0$$

$$U = \begin{Bmatrix} u_1(t) = \phi_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \qquad \ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix}$$

**En remplaçant (9.15) et (9.16) dans (9.14), on aura :**

$$\begin{Bmatrix} (m_1\omega^2 f_{11} - 1)\phi_1 + m_2\omega^2 f_{12}\phi_2 + \cdots + m_n\omega^2 f_{1n}\phi_n = 0 \\ m_1\omega^2 f_{21}\phi_1 + (m_2\omega^2 f_{22} - 1)\phi_2 + \cdots + m_n\omega^2 f_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ m_1\omega^2 f_{i1}\phi_1 + m_2\omega^2 f_{i2}\phi_2 + \cdots + (mi\,\omega^2 f_{ii} - 1)\phi_i .. + m_n\omega^2 f_{in}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ m_1\omega^2 f_{n1}\phi_1 + m_2\omega^2 f_{n2}\phi_2 + \cdots + (mn\,\omega^2 f_{nn} - 1)\phi_n = 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(9.17)}$$

**Sous forme matricielle :**

$$(\omega^2 FM - I)\{\phi\} = 0 \qquad \textbf{(9.18)}$$

**Comme $\{\phi\} \neq 0$, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :**

$$det|\omega^2 FM - I| = 0 \qquad \textbf{(9.19)}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

# 4. Propriété des modes propres

## i. Orthogonalité des modes

En appliquant l'équation (9.5) $(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$ pour 02 modes différents « i » et « j » on aura:

$$\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \omega_i^2\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_i\}$$
$$\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \omega_j^2\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_j\} \qquad (9.20)$$

Pré-multiplions (9.20) par $\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T$ et $\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T$ respectivement :

$$\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \omega_i^2\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_i\}$$
$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \omega_j^2\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_j\} \qquad (9.21)$$

Comme la matrice »K » est symétrique ;

$$\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_j\} \qquad (9.22)$$

De même la symétrie de la matrice « M » nous donne:

$$\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_i\} = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T\boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi}_j\} \qquad (9.23)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Propriété des modes propres

i. Orthogonalité des modes

$$\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T \boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \omega_i^2\{\boldsymbol{\phi}_j\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi}_i\}$$
$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{K}\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \omega_j^2\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi}_j\} \qquad (9.21)$$

**La soustraction des équations (9.21) donne:**

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \mathbf{0}$$

**Comme $\omega_i \neq \omega_j$ alors:**

$$\boxed{\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{M}\,\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \mathbf{0}} \qquad (9.24)$$

**On dit que les modes sont M-Orthogonaux**

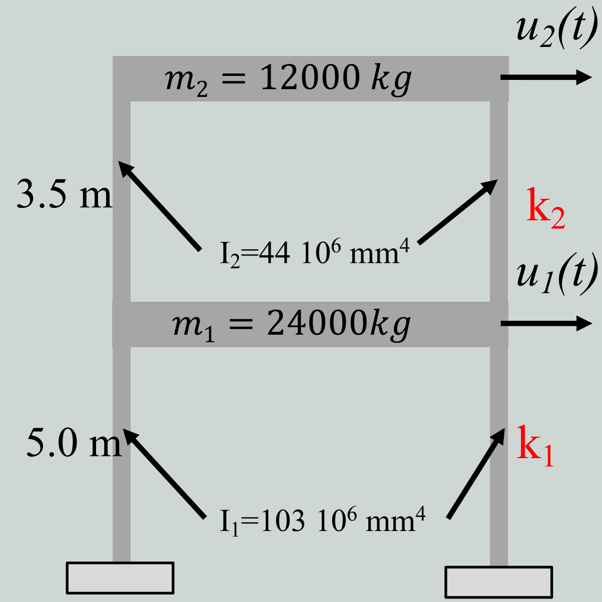
**De même, de (9.23) «et (9.21), on a:**

$$\boxed{\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{K}\,\{\boldsymbol{\phi}_j\} = \mathbf{0}}$$

**On dit que les modes sont K-Orthogonaux**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

# Exemple




**Considérons l'exemple de la diapo 10 (exemple portique à 02 étages déjà traité) et vérifions l'orthogonalité des modes propres trouvés.**

**Rappel:**

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.89\ 10^6 & -4{,}93\ 10^6 \\ -4{,}93\ 10^6 & 4{,}93\ 10^6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.758 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

## M-Orthogonalité

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \{0.758 \quad 1.0\} \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \{18.192\ 10^3 \quad 12\ 10^3\} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{M}\ \{\boldsymbol{\phi_2}\} = 0$$

## K-Orthogonalité

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{K}\ \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \{0.758 \quad 1.0\} \begin{bmatrix} 8.89\ 10^6 & -4{,}93\ 10^6 \\ -4{,}93\ 10^6 & 4{,}93\ 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \{1.80862\ 10^6 \quad 1.19306\ 10^6\} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{K}\ \{\boldsymbol{\phi_2}\} = 0$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## ii. Normalisation des modes propres

**Les modes propres sont calculés par rapport à une valeur choisie.**

**Cette valeur peut être choisie de plusieurs façon:**

- **Déplacement d'un nœud particulier (qlq) égal à 1 dans tous les modes.**
- **Le plus grand déplacement d'un nœud dans le mode considéré égal à 1.**
- **Les modes propres normalisés par rapport aux matrices K ou M.**

**C'est cette dernière qui est intéressante et la plus utilisée dans les logiciels et le plus souvent la normalisation est prise par rapport à la masse.**

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{K} \{\boldsymbol{\phi}_i\} = 1$$

**Ou bien**

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{M} \{\boldsymbol{\phi}_i\} = 1 \qquad \textbf{(9.25)}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

## Propriété des modes propres

### ii. Normalisation des modes propres

**Cette normalisation par rapport à la masse se fera en calculant :**

$$\widehat{M}_i = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \boldsymbol{M} \{\boldsymbol{\phi}_i\} \quad \text{(Scalaire)} \qquad (9.26)$$

**On normalise par la suite chaque mode, en calculant :**

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_i = \frac{\{\boldsymbol{\phi}_i\}}{\sqrt{\widehat{M}_i}} \qquad (9.27)$$

**Avec cette M-normalisation, on peut vérifier que:**

$$[\boldsymbol{\Phi}]^T[\boldsymbol{M}][\boldsymbol{\Phi}] = \boldsymbol{I} \qquad (9.27)$$

**Avec:**

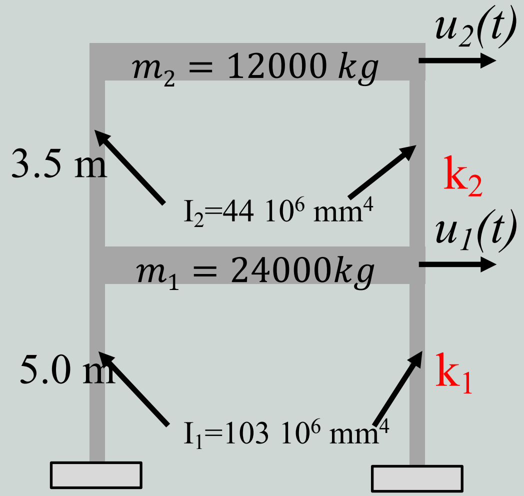
- $[\boldsymbol{M}]$ **: Matrice masse.**
- $[\boldsymbol{\Phi}]$ **: Matrice spectrale (constituée des modes propres).**
- $\boldsymbol{I}$ **: Matrice identité (diagonale)**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

## Spectre de réponse

$$\widehat{M}_i = \{\phi_i\}^T\, M\, \{\phi_i\} \quad \hat{\phi}_i = \frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{\widehat{M}_i}} \quad [\Phi\,]^T[M][\Phi\,] = I$$

# Exemple




**Toujours le même exemple**

**Rappel:**

$$M = \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.758 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{M}_1 = \{\boldsymbol{\phi_1}\}^T \boldsymbol{M}\, \{\boldsymbol{\phi_1}\} = \{0.758 \quad 1.0\} \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.758 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$= \{18.192\ 10^3 \quad 12\ 10^3\} \begin{Bmatrix} 0.758 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{M}_1 = 25.79 \qquad \hat{\phi}_1 = \frac{\{\phi_1\}}{\sqrt{\widehat{M}_1}} = \frac{1}{\sqrt{25.79}} \begin{Bmatrix} 0.758 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.149 \\ 0.197 \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{M}_2 = \{\boldsymbol{\phi_2}\}^T \boldsymbol{M}\, \{\boldsymbol{\phi_2}\} = \{-0.66 \quad 1.0\} \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \{-15.84\ 10^3 \quad 12\ 10^3\} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\widehat{M}_2 = 22.45 \qquad \hat{\phi}_2 = \frac{\{\phi_2\}}{\sqrt{\widehat{M}_2}} = \frac{1}{\sqrt{22.45}} \begin{Bmatrix} -0.66 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.139 \\ 0.211 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.149 & -0.139 \\ 0.197 & 0.211 \end{bmatrix}$$

**Et:**

$$[\Phi\,]^T[M][\Phi\,] = \begin{bmatrix} 0.149 & 0.197 \\ -0.139 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24\ 10^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12\ 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.149 & -0.139 \\ 0.197 & 0.211 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

**Merci.** **Fin du chapitre 9**

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FSI-Tlemcen*

## Dynamique des structures

**Abdellatif MEGNOUNIF**

# Prochain Cours

**Partie 2 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté**

**Chap. 10**

# Méthodes numériques de calcul des systèmes propres

***COURS 10***

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*