Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Chap. 8

Formulation des équations du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté (SPDDL).

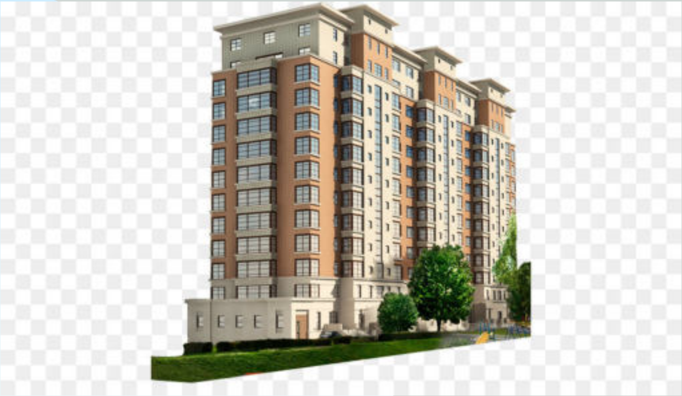
COURS 8 Dimanche 08.01.2023

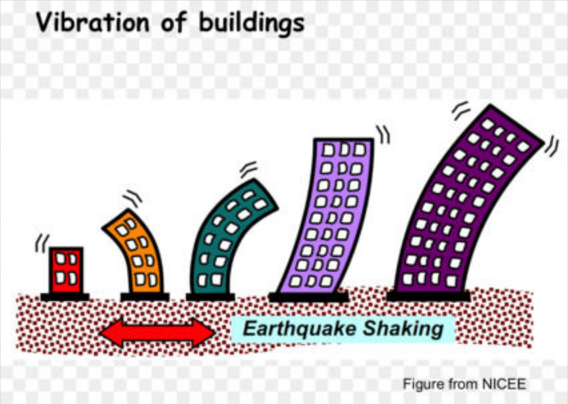
1. Introduction

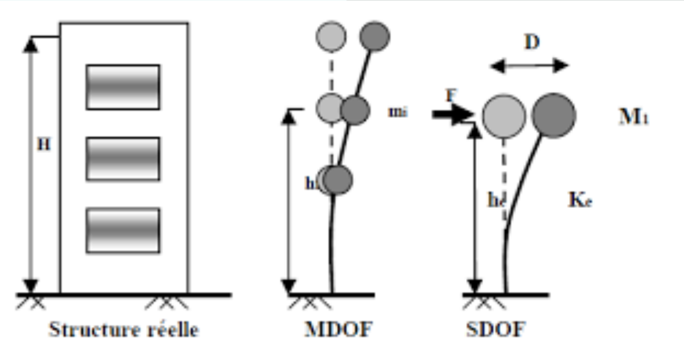
- Système à plusieurs DDL : Mouvement est décrit par plusieurs variables (déplacements ou rotations)
- Système d'équations différentielles
- Le nombre de DDL est égal au nombre des composants de déplacements requis pour exprimer les forces d'inertie
- On utilise la notion de nœud.
- Les nœuds possèdent une (ou plusieurs) masse(s)
- En général, un nœud à 06 DDL (03 translations et 03 rotations).
- Le nombre total de DDL de la structure = Nbr Nœud x 6.

Exemple de SPDDL

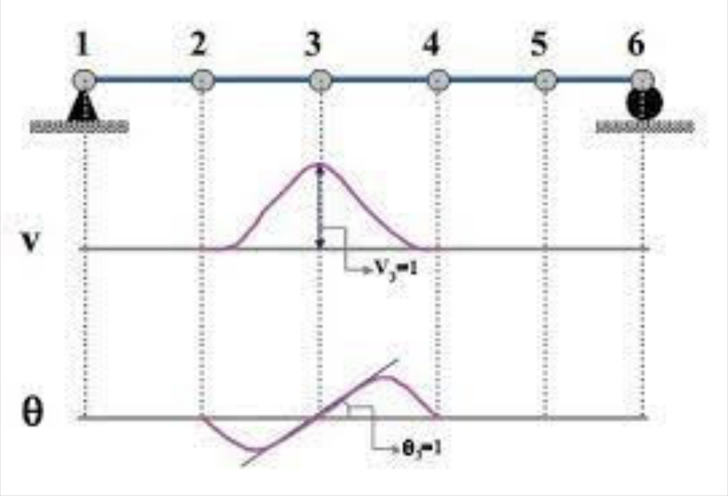
Généralement toutes structures à 3D







Bâtiments à plusieurs étages

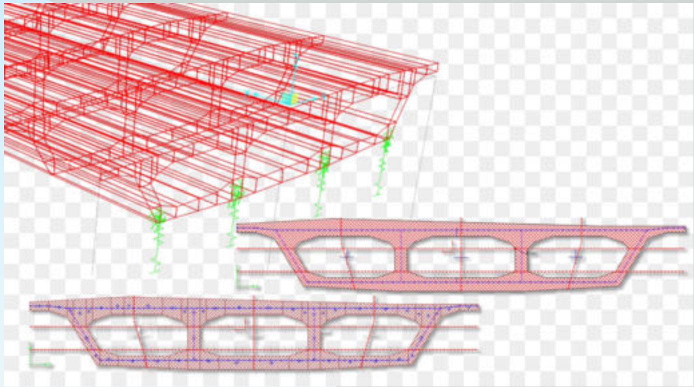


Poutres à masses concentrées

Exemple de SPDDL

Généralement toutes structures à 3D

Structures de ponts



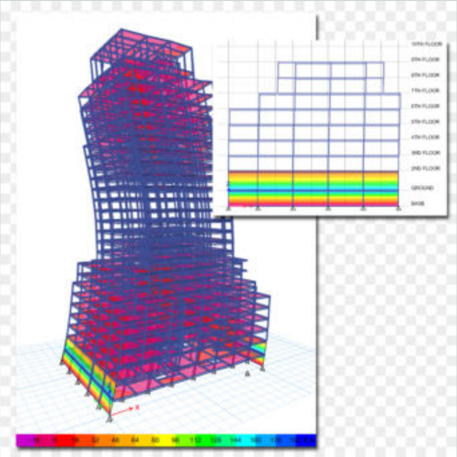
Ponts à poutres caissons

Ponts à poutres en I

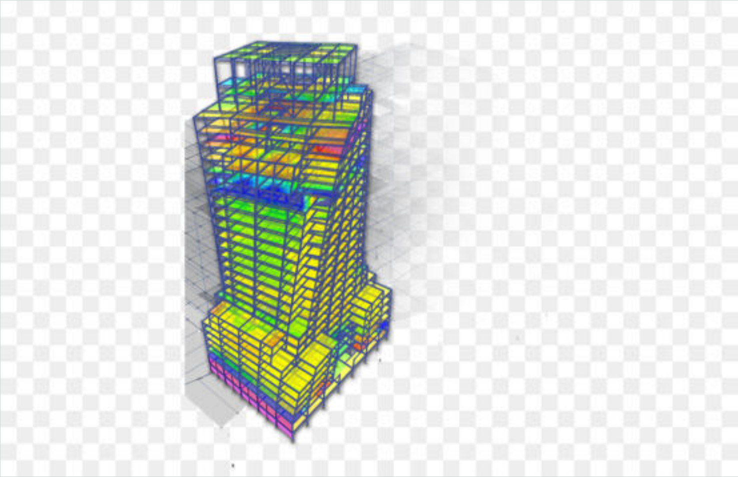
Ponts à poutres en treillis

Exemple de SPDDL

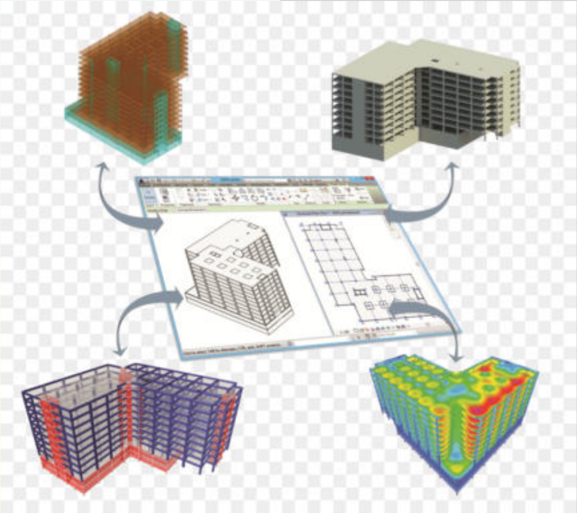
Grace à la modélisation numérique 3D



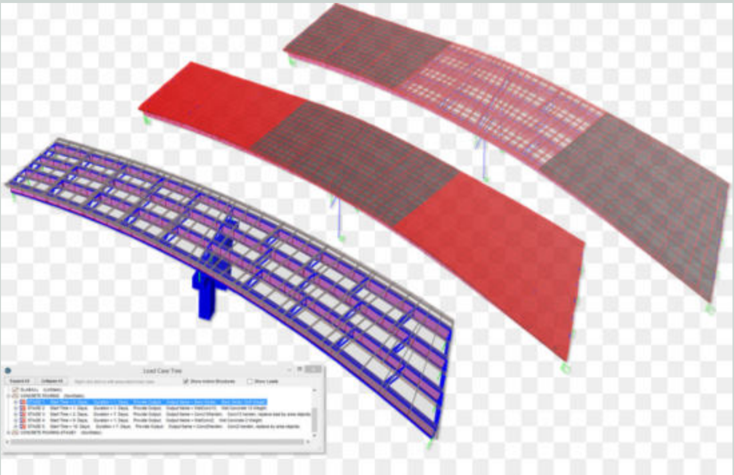
Mode flexionnel supérieur



Mode torsionnel



Du réel vers le modèle numérique

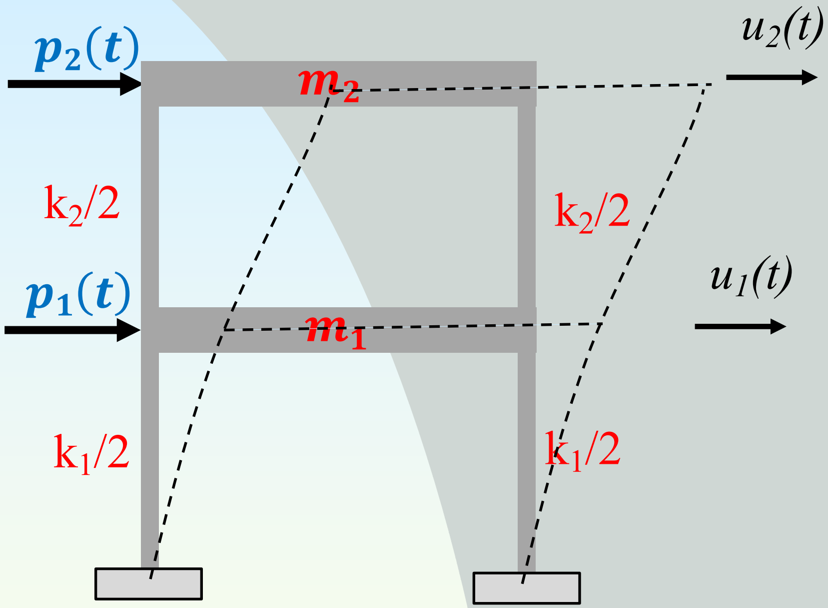


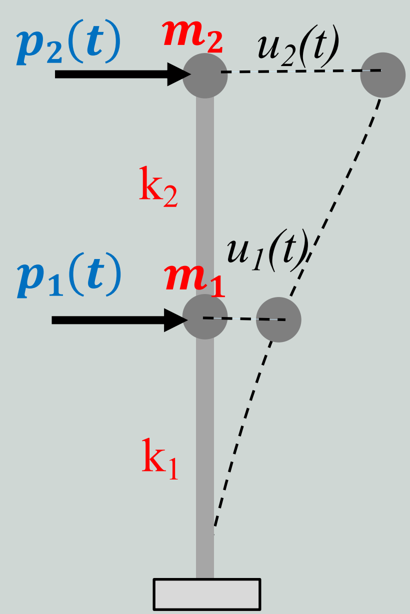
Tablier d'un pont

2. Equations du mouvement

Exemples introductifs

i. Système à 02 DDL non amorti

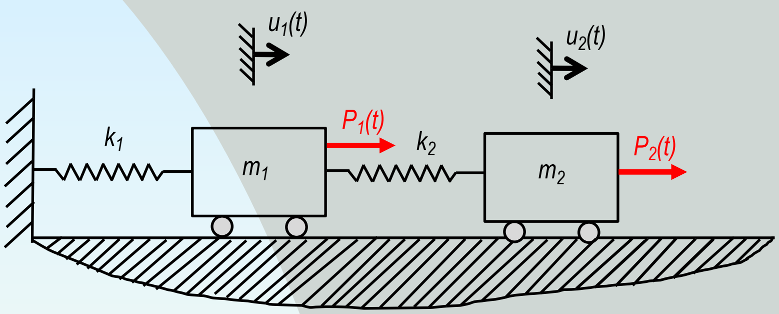


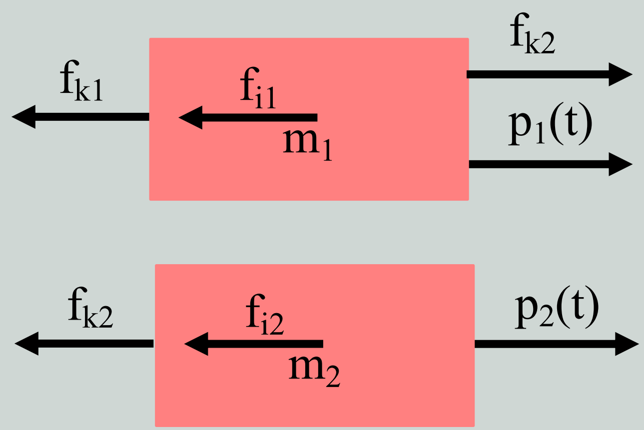


- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.**

Equation du mouvement

Considérons le modèle suivant du système





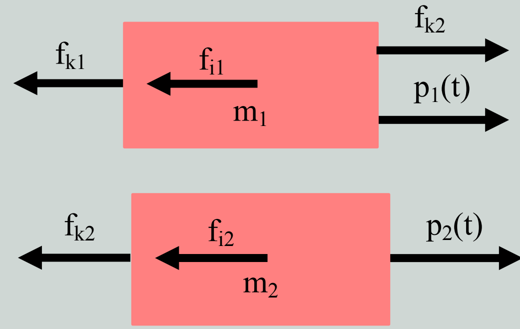
On applique la 2ème loi de Newton pour chaque masse

Masse 1 : $$f_{i1} = m_1 \ddot{u}_1(t) = p_1(t) - fk_1 + fk_2$$ **(8.1)**

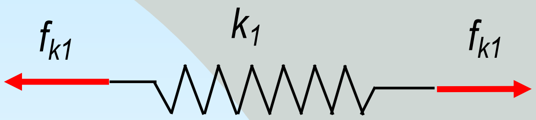
Masse 2 : $$f_{i2} = m_2 \ddot{u}_2(t) = p2(t) - fk_2$$

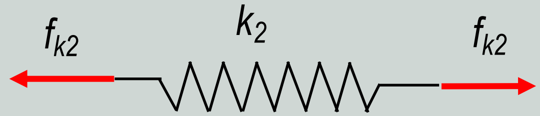
Les forces élastiques sont proportionnelles aux extensions des ressorts (à ne pas confondre avec déplacements) dans le cas élastique linéaire.

Equation du mouvement



Soit





$$f_{k1} = k_1\, e_1$$

$$e_1 = u_1$$

$$f_{k1} = k_1\, u_1$$

$$f_{k2} = k_2\, e_2$$

$$e_2 = u_2 - u_1$$

$$f_{k2} = k_2\, u_2 - k_2\, u_1$$

En remplaçant dans (8.1), on aura

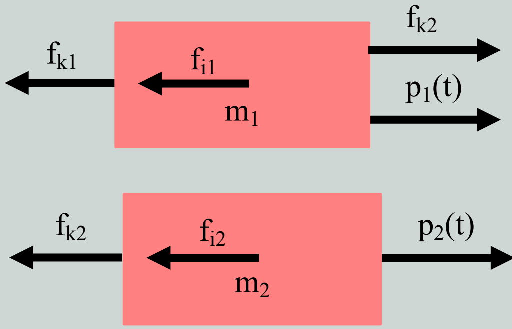
Masse 1 : $\boldsymbol{f_{i1} + f_{k1} - f_{k2} = p_1(t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{m_1\, \ddot{u}_1} + k_1\, u_1 - k_2\, u_2 + k_2\, u_1 = \boldsymbol{p_1(t)}$

$$m_1\, \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2\, u_2 = p_1(t) \qquad \textbf{(8.2)}$$

Masse 2 : $\boldsymbol{f_{i2} + f_{k2} = p_2(t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{m_2\, \ddot{u}_2} + k_2\, u_2 - k_2\, u_1 = \boldsymbol{p_2(t)}$

$$m_2\, \ddot{u}_2 - k_2\, u_1 + k_2\, u_2 = p_2(\boldsymbol{t}) \qquad \textbf{(8.3)}$$

Equation du mouvement



Ainsi pour les 02 masses, on a

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)\,u_1 - k_2\,u_2 = p_1(t) \\ m_2\,\ddot{u}_2 - k_2\,u_1 + k_2\,u_2 = p_2(\boldsymbol{t}) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on aura:

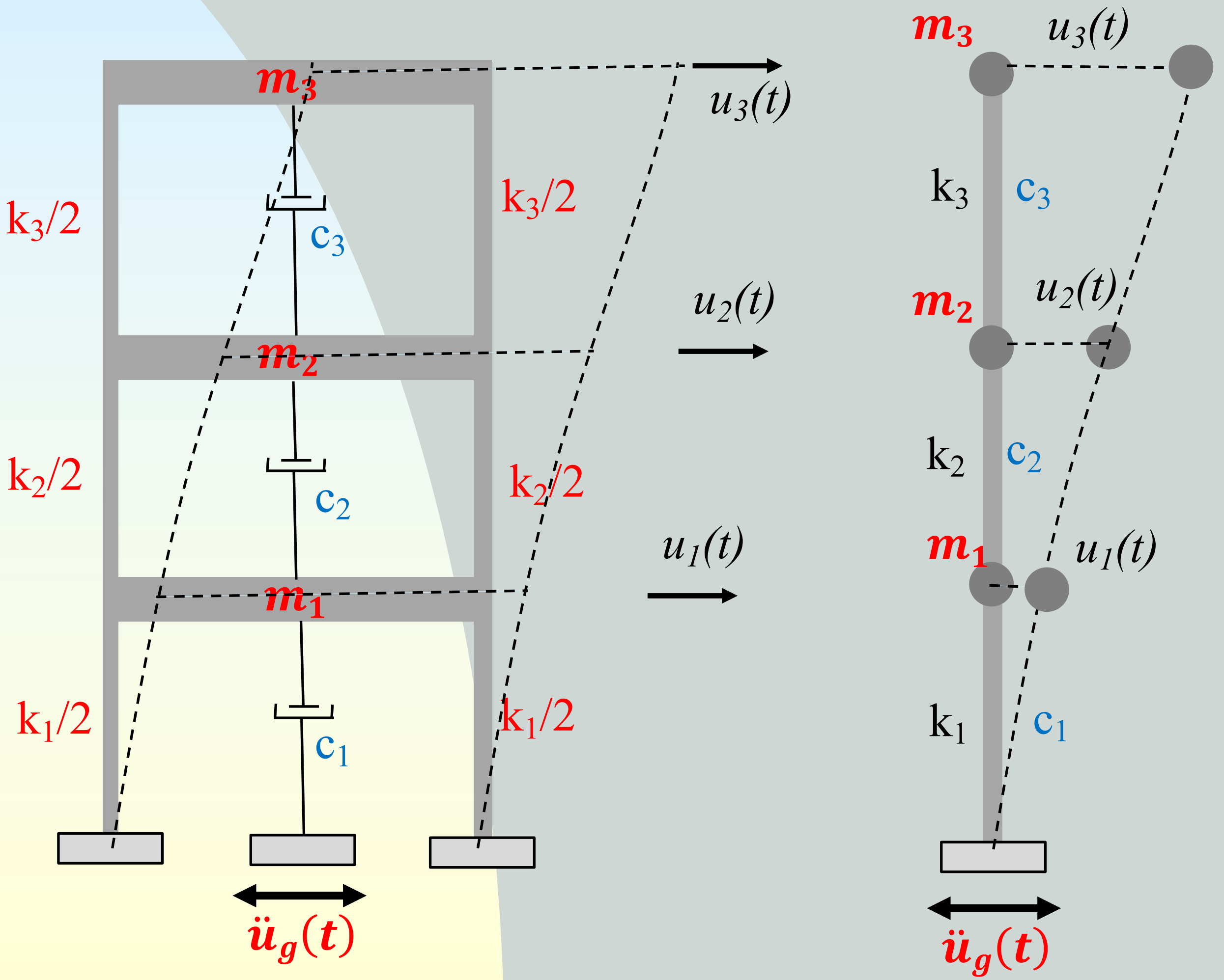
$$\begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(8.4)}$$

(8.4) Le modèle mathématique du portique à 02 niveaux

Prenons un 2ème exemple

ii. Système à 03 DDL amorti

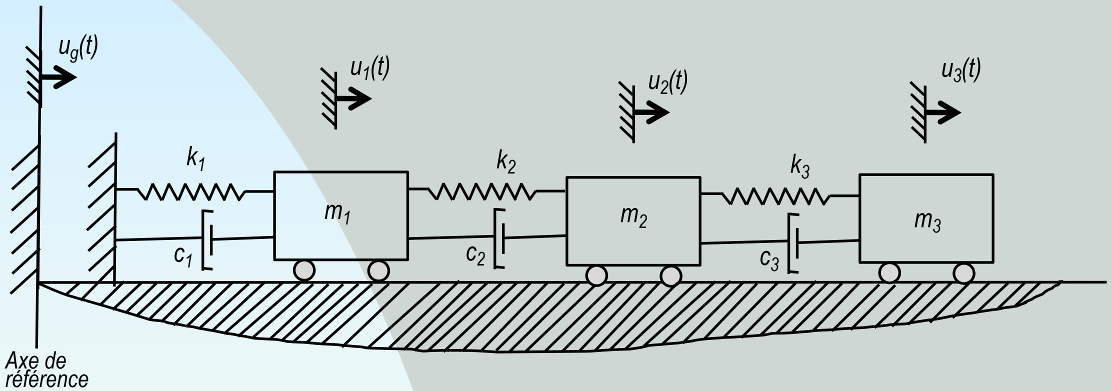
Système soumis à une accélération du support

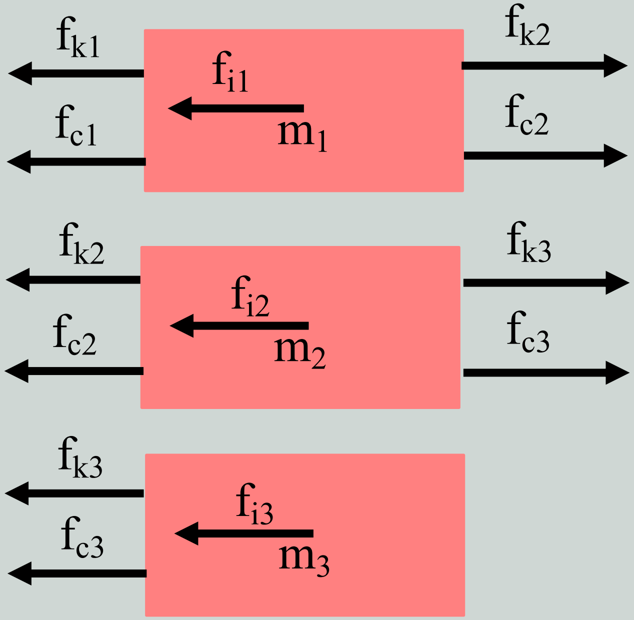


- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 03 niveaux.**

Equation du mouvement

Considérons le modèle suivant du système





On pose:

$$u_{tot1} = u_g + u_1 \qquad u_{tot2} = u_g + u_2 \qquad u_{tot3} = u_g + u_3 \tag{8.5}$$

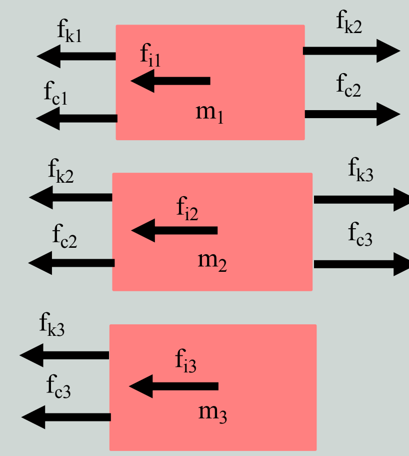
u_1 ; u_2 et u_3 : **Déplacements relatifs des masses m1, m2 et m3 par rapport au support (repère local).**

u_{tot1} ; u_{tot2} et u_{tot3} : **Déplacements absolu des masses m1, m2 et m3 par rapport au global (axe de référence).**

u_g : **Déplacement du support par rapport au global (axe de référence).**

Equation du mouvement

On applique la 2ème loi de Newton pour chaque masse



Masse 1 : $f_{i1} = m_1 \ddot{u}_{tot1}(t) = -fk_1 - fa_1 + fk_2 + fa_2$

Masse 2 : $f_{i2} = m_2 \ddot{u}_{tot2}(t) = -fk_2 - fa_2 + fk_3 + fa_3$

Masse 3 : $f_{i3} = m_3 \ddot{u}_{tot3}(t) = -fk_3 - fa_3$ **(8.6)**

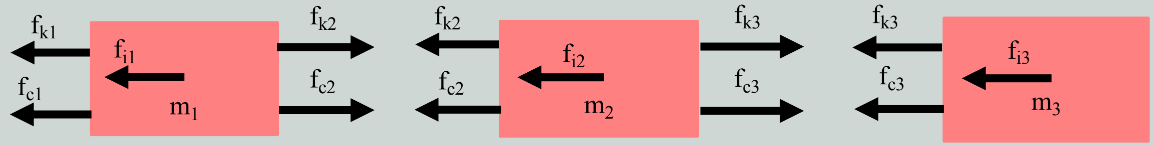
Les forces élastiques sont proportionnelles aux extensions des ressorts (à ne pas confondre avec déplacements) dans le cas élastique linéaire.

Les forces d'amortissement sont proportionnelles aux vitesses (Différence des vitesses).

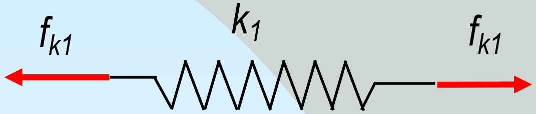
Rem : **Faire attention au choix du repère.**

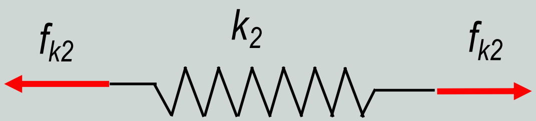
Il est préférable d'exprimer l'équation du mouvement dans le repère relatif.

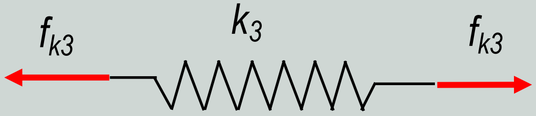
Equation du mouvement



Soit





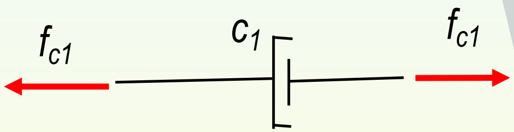


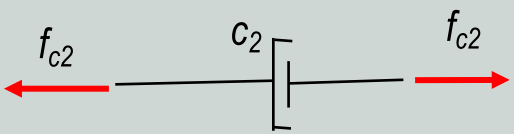
$$f_{k1} = k_1 e_1$$
$$e_1 = u_{tot1} - u_g = u_1$$
$$f_{k1} = k_1 u_1$$

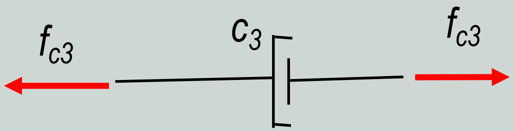
$$f_{k2} = k_2 e_2$$
$$e_2 = utot_2 \_ uto_{t1} = u_2 - u_1$$
$$f_{k2} = k_2 u_2 - k_2 u_1 \quad (8.7)$$

$$f_{k3} = k_3 e_3$$
$$e_3 = u_{tot3} - utot_2 = u_3 - u_2$$
$$f_{k3} = k_3 u_3 - k_3 u_2$$

De même pour les forces d'amortissements





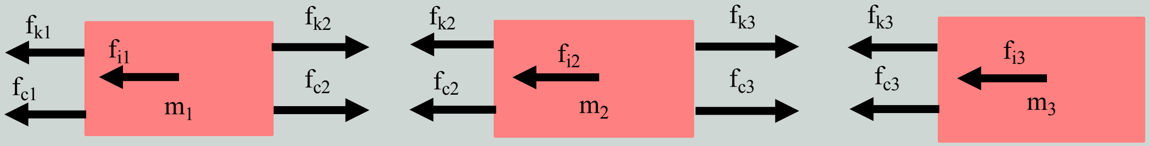


$$f_{c1} = c_1 \dot{e}_1$$
$$\dot{e}_1 = \dot{u}_{tot1} - \dot{u}_g = \dot{u}_1$$
$$f_{c1} = c_1 \dot{u}_1$$

$$f_{c2} = c_2 \dot{e}_2$$
$$\dot{e}_2 = \dot{u}_{tot2} \_ \dot{u}_{tot1} = \dot{u}_2 - \dot{u}_1$$
$$f_{c2} = c_2 \dot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 \quad (8.8)$$

$$f_{c3} = c_3 \dot{e}_3$$
$$\dot{e}_3 = \dot{u}_{tot3} - \dot{u}_{tot2} = \dot{u}_3 - \dot{u}_2$$
$$f_{c3} = c_3 \dot{u}_3 - c_3 \dot{u}_2$$

Equation du mouvement



En remplaçant dans (8.7) et (8.8) dans (8.6), on aura

Masse 1 : $\boldsymbol{f_{i1} + f_{k1} + fa_1 - f_{k2} - fa_2 = 0}$

$$m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_g) + k_1 u_1 + c_1\dot{u}_1 - k_2 u_2 + k_2 u_1 - c_2\dot{u}_2 + c_2\dot{u}_1 = 0$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - k_2 u_2 - c_2\dot{u}_2 = -m_1 \ddot{u}_g \qquad \textbf{(8.9)}$$

Masse 2 : $\boldsymbol{f_{i2} + f_{k2} + fa_2 - f_{k3} - fa_3 = 0}$

$$m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_g) + k_2 u_2 - k_2 u_1 + c_2\dot{\boldsymbol{u}}_2 - c_2\dot{\boldsymbol{u}}_1 - k_3 u_3 + k_3 u_2 - c_3\dot{u}_3 + c_3\dot{u}_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - c_2\dot{\boldsymbol{u}}_1 + (c_2 + c_3)\dot{u}_2 - k_3 u_3 - c_3\dot{u}_3 = -m_2 \ddot{u}_g$$

(8.10)

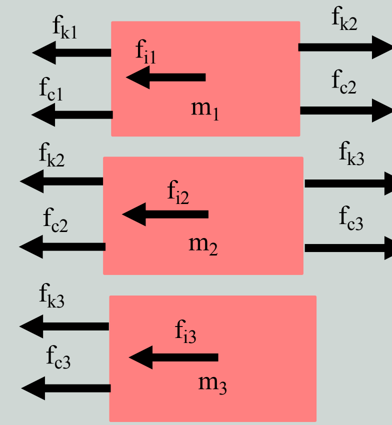
Masse 3 : $\boldsymbol{f_{i3} + f_{k3} + fa_3 = 0}$

$$m_3(\ddot{u}_3 + \ddot{u}_g) + k_3 u_3 - k_3 u_2 + c_3\dot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 = 0$$

$$m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 = -m_3 \ddot{u}_g \qquad \textbf{(8.11)}$$

Equation du mouvement

Ainsi pour les 03 masses, on a



$$\begin{cases} m_1\,\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2\,u_2 = -m_1\,\ddot{u}_g \\ m_2\,\ddot{u}_2 - c_2\dot{\boldsymbol{u}}_1 + (c_2 + c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 - k_2\,u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3\,u_3 = -m_2\,\ddot{u}_g \\ m_{\,3}\,\ddot{u}_3 - c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3\,u_3 = -m_3\,\ddot{u}_g \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on aura:

$$\begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_{\,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & \mathbf{0} \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ \mathbf{0} & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \mathbf{0} \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ \mathbf{0} & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_{\,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_g \end{Bmatrix}$$

(8.12)

(8.12) Le modèle mathématique du portique à 03 niveaux amorti soumis à une accélération du support

Les équations du mouvement ?

Ainsi de ces 02 exemples, on remarque que les équations (8.4) et (8.12) s'écrivent

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P(t)\} \qquad (8.13)$$

Où:

$[M]$: Matrice masse nxn

$[C]$: Matrice d'amortissement nxn

$[K]$: Matrice de rigidité nxn

n : nbr total des DDL

$\{\ddot{U}\}$: Vecteur accélération nx1

$\{\dot{U}\}$: Vecteur vitesse nx1

$\{U\}$: Vecteur déplacement nx1

$\{P(t)\}$: Vecteur force extérieure nx1

Par simplicité, on écrit :

$$M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = P(t) \qquad (8.14)$$

Dans le cas d'une accélération du support, on aura:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M]\{\ddot{U}_g(t)\} \qquad (8.15)$$

Ou bien :

$$M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g \qquad (8.16)$$

3. Développement des matrices M, C et K

i. Introduction

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t) \qquad (8.14)$$

- Définir les équations du mouvement = Détermination de K, C et M.
- Chaque terme de l'équation (8.14) représente une force (d'inertie, d'amortissement et élastique respectivement).
- Chaque force peut être exprimée par des coefficients d'influence

❖ **Force élastique en « i »**

$$f_{ki} = k_{i1}\,u_1(t) + k_{i2}\,u_2(t) + \ldots + k_{ii}\,u_i(t) + \ldots + k_{in}\,u_n(t) \qquad (8.15)$$

k_{ij} : est une force en « i » due à un déplacement unitaire en « j » lorsque tous les autres déplacements sont nuls.

Sous forme matricielle, on aura

$$\begin{Bmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \\ \vdots \\ f_{ki} \\ \vdots \\ f_{kn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1i} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2i} & \ldots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \ldots & k_{ii} & \ldots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{ni} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (8.16)$$

De même

❖ **Force d'amortissement en « i »**

$$f_{ci} = c_{i1}\,\dot{u}_1(t) + c_{i2}\,\dot{u}_2(t) + \ldots + c_{ii}\,\dot{u}_i(t) + \ldots + c_{in}\,\dot{u}_n(t) \qquad (8.17)$$

c_{ij} : est une force d'amortissement en « i » due à une vitesse unitaire en « j » lorsque toutes les autres vitesses sont nulles.

Sous forme matricielle, on aura

$$\begin{Bmatrix} f_{c1} \\ f_{c2} \\ \vdots \\ f_{ci} \\ \vdots \\ f_{cn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1i} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2i} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ii} & \ldots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{ni} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_i \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \qquad (8.18)$$

De même

❖ **Force d'inertie en « i »**

$$f_{ii} = m_{i1}\ddot{u}_1(t) + m_{i2}\ddot{u}_2(t) + \ldots + m_{ii}\ddot{u}_i(t) + \ldots + m_{in}\ddot{u}_n(t) \qquad (8.19)$$

m_{ij} : est une force d'inertie en « i » due à une accélération unitaire en « j » lorsque toutes les autres accélérations sont nulles.

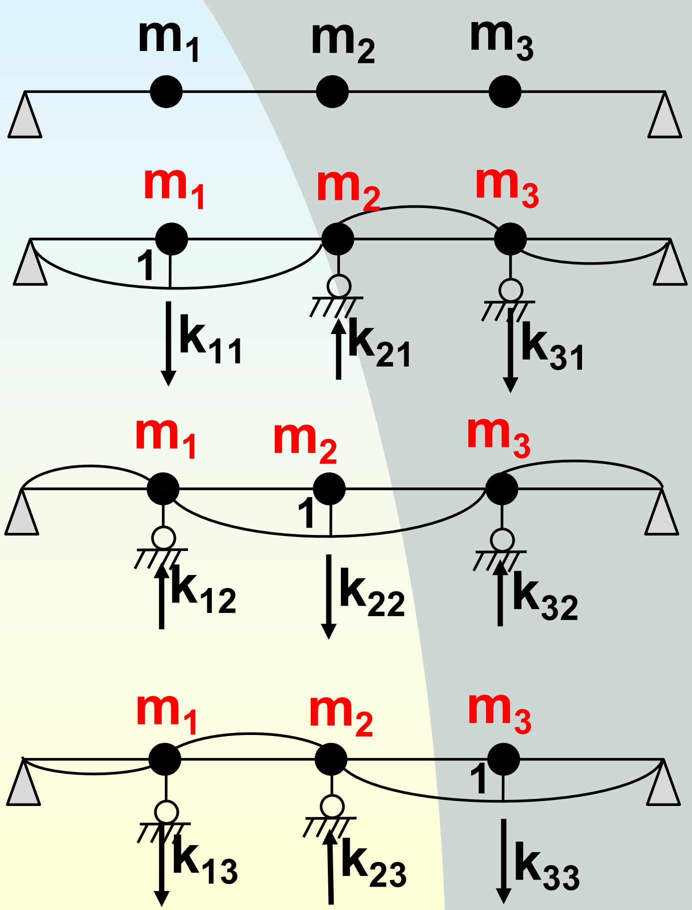
Sous forme matricielle, on aura

$$\begin{Bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \vdots \\ f_{ii} \\ \vdots \\ f_{in} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1i} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2i} & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \ldots & m_{ii} & \ldots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{ni} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} \qquad (8.20)$$

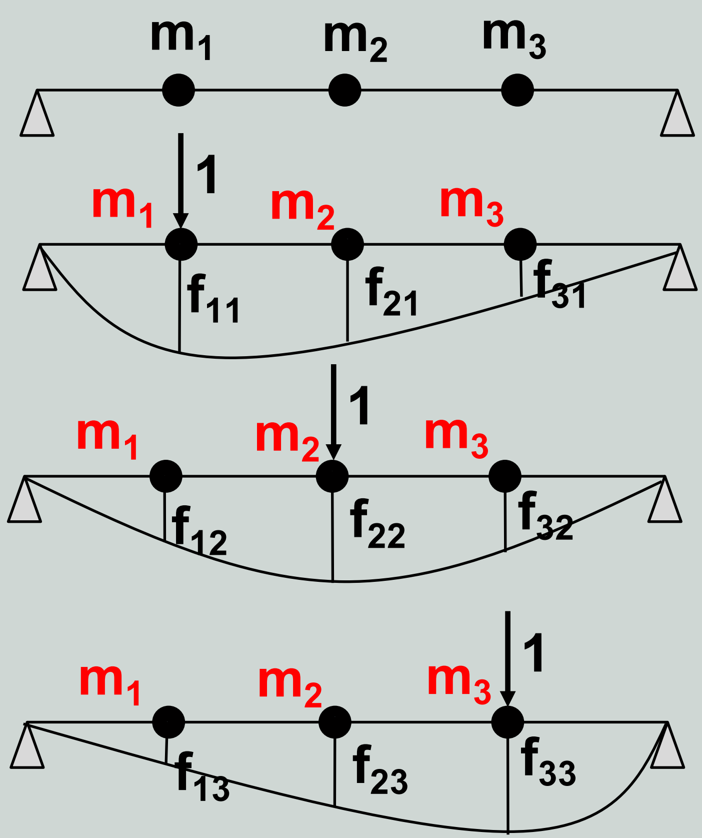
ii. Développement de la matrice K.

Prenons 02 exemples : celui d'un portique à étage et celui d'une poutre

❖ **Développement par la rigidité**



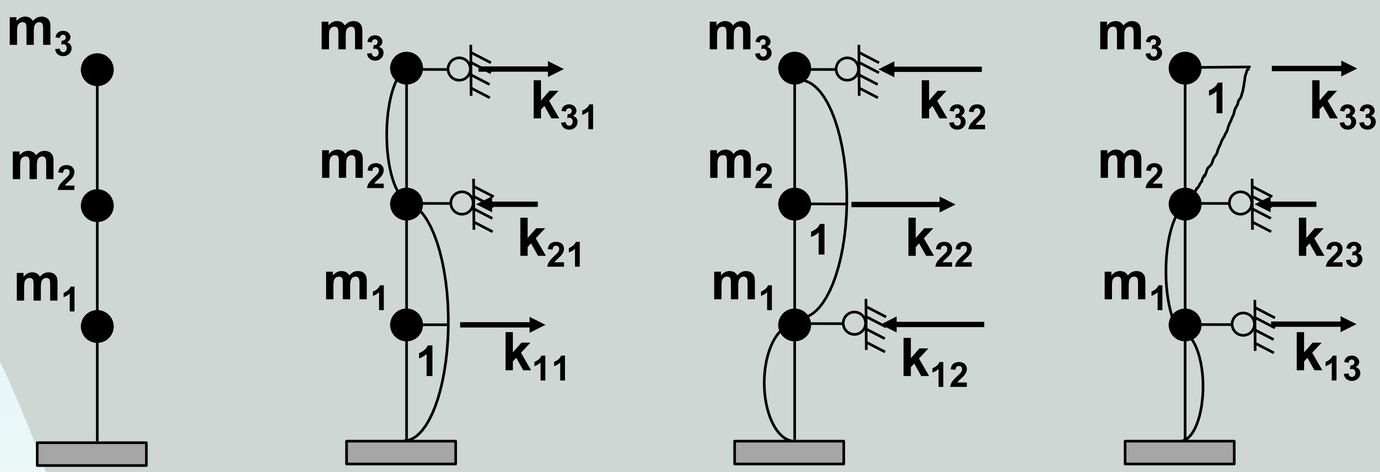
❖ **Par la flexibilité**



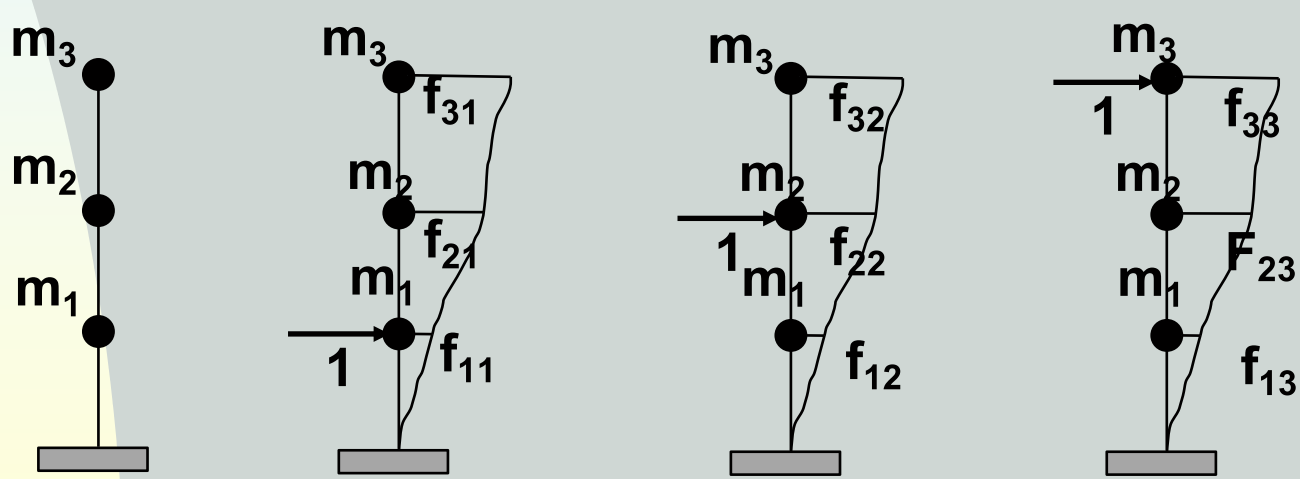
Plus à l'aise avec les déplacements ?

ii. Développement de la matrice K.

Par rigidité



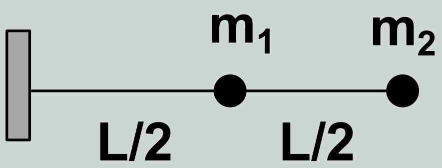
Par flexibilité



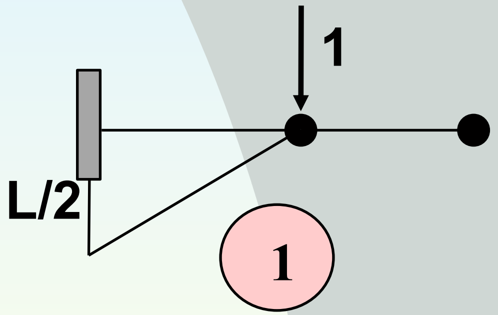
Développement matrice de rigidité

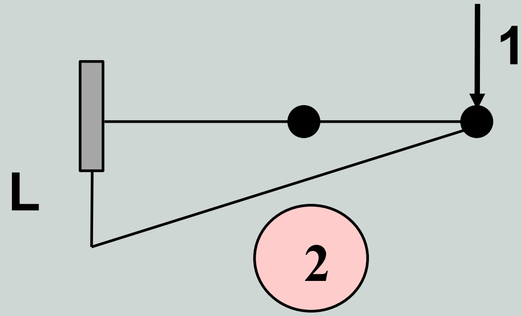
Exemple 1

Déterminer la matrice de rigidité de la poutre console suivante à 02 DDL.



On passe par la flexibilité puis on inverse



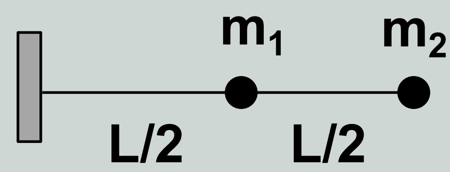


Verechaguine

$$x_{st} = \frac{1}{EI}\int M\, m\, dx \qquad x_{st} = \frac{1}{EI}\, yG\, A$$

Développement matrice de rigidité

Exemple 1



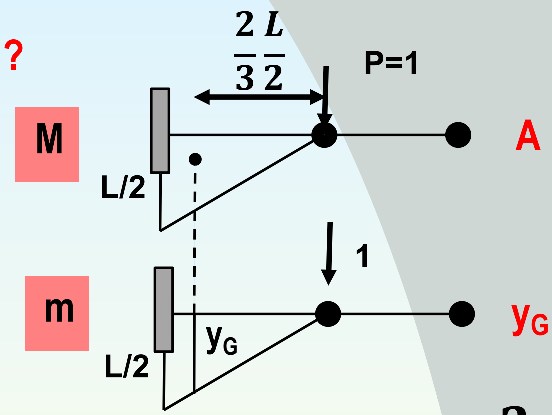
f_{11} : Diagramme 1 x Diagramme 1

f_{22} : Diagramme 2 x Diagramme 2

f_{12} : Diagramme 1 x Diagramme 2

f_{21} : Diagramme 2 x Diagramme 1

f_{11} ?

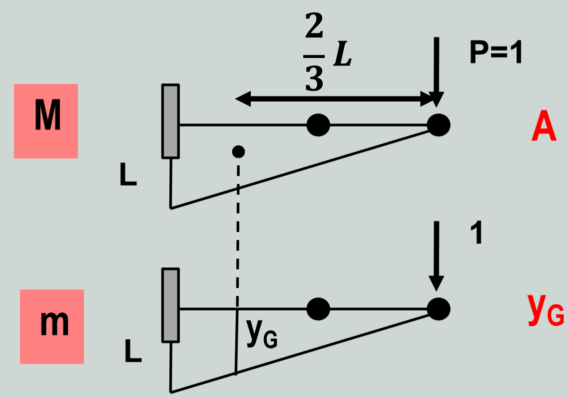


$$A = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{L}{2} \qquad \frac{y_G}{L/2} = \frac{\frac{2}{3}L/2}{L/2}$$

$$x_{st} = f_{11} = \frac{1}{EI}\, yG\, A = \frac{1}{EI}\frac{2}{3}L/2\,\frac{L^2}{8}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{24EI}$$

f_{22} ?



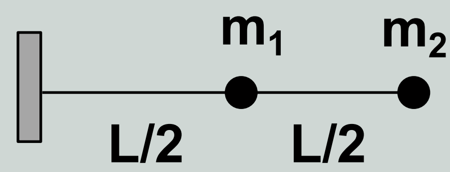
$$A = \frac{1}{2}LL \qquad \frac{y_G}{L} = \frac{\frac{2}{3}L}{L}$$

$$x_{st} = f_{22} = \frac{1}{EI}\frac{2}{3}L\,\frac{L^2}{2}$$

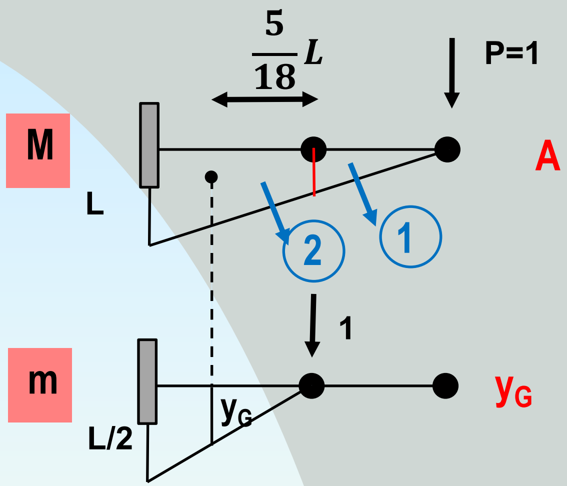
$$f_{22} = \frac{1}{EI}\frac{L^3}{3}$$

Développement matrice de rigidité

Exemple 1



f12 ?



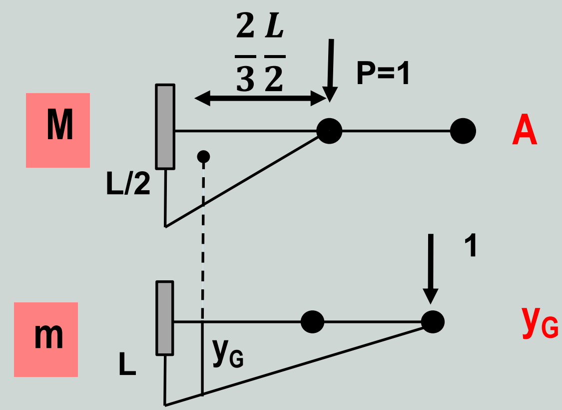
$$A_1 = \frac{1}{2} L L \qquad y_{1G} = 0$$

$$A_2 = L/2\,\frac{1}{2}(L + L/2) \qquad \frac{y_{2G}}{L/2} = \frac{5L/18}{L/2}$$

$$x_{st} = f_{12} = \frac{1}{EI}\,\frac{5}{18}\,L\,\frac{3L^2}{8}$$

$$f_{12} = \frac{5L^3}{48EI}$$

f21 ?



$$A = \frac{1}{2}\,\frac{L}{2}\,\frac{L}{2} \qquad \frac{y_G}{L} = \frac{\frac{2}{3}\frac{L}{2} + \frac{L}{2}}{L}$$

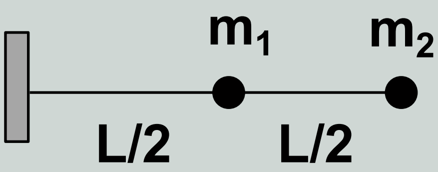
$$x_{st} = f_{21} = \frac{1}{EI}\,\frac{5}{6}\,L\,\frac{L^2}{8}$$

$$f_{21} = \frac{5L^3}{48EI}$$

Pour simplicité on pouvait diviser le trapèze 2 en triangle + rectangle

Développement matrice de rigidité

Exemple 1



Ainsi la matrice de flexibilité sera :

$$[f] = \begin{bmatrix} \dfrac{L^3}{24EI} & \dfrac{5L^3}{48EI} \\ \dfrac{5L^3}{48EI} & \dfrac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

En inversant, on obtient la rigidité

$$[K] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Développement matrice de rigidité

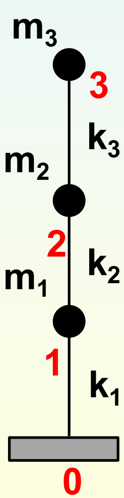
Exemple 1

Cas pratique, si on connait la rigidité de chaque élément, on peut facilement calculer la matrice de rigidité globale

On définit un poteau ou poutre par 02 nœuds (i, j). Si on a 1SDDL par nœud, on aura:

$$[K_i] = \begin{array}{cc} i & j \\ \left[\begin{matrix} k_i & -ki \\ -ki & k_i \end{matrix}\right] & \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \end{array}$$

Si on a plusieurs éléments on fera une sommation (Assemblage)



$$[K] = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \left[\begin{matrix} k_1 & -k_1 & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ & 0 & -k_3 & k_3 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Assemblage.

Valable pour plusieurs DDL par nœud

❖ Définie positive

L'énergie élastique est : $$V = \frac{1}{2} U^T K U > 0$$

Elle possède toujours une **inverse (la flexibilité)**

$$[f] = [K]^{-1}$$

❖ Symétrique

Par théorème de Betti

Le travail de P_1 dans le champ U_2 est égal au travail de P_2 dans le champ U_1

$k_{ij} = k_{ji}$ Pour i≠j

$$[K]^T = [K]$$

❖ Bandée

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & 0_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{ii} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemple :

Tridiagonale pour les poutres droites ou bien les structures à plusieurs niveaux

iii. Développement de la matrice C.

L'amortissement reste à ce jour tout à fait vague.

Il est évalué empiriquement.

Généralement :

$$C = M \sum_{i=0}^{q} a_i \left(M^{-1}K\right)^i \qquad (8.21)$$

Où:

a_i : Multiplicateur scalaire

q : Nbr arbitraire tel que q < nbr de DDL

Les « a_i » sont généralement déterminés à partir des modes par:

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_i a_i \, \omega_n^{2i} \qquad (8.22)$$

iii. Développement de la matrice C.

$$C = M\sum_{i=0}^{q} a_i \left(M^{-1}K\right)^i \qquad \xi_n = \frac{1}{2\omega_n}\sum_i a_i\,\omega_n^{2i}$$

Pour q=1, on a le modèle de Rayleigh

$$C = a_0\,M + a_1\,K \tag{8.23}$$

a_0 et a_1 sont reliés à n'importe quel mode « j » par:

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1\omega_j}{2} \tag{8.24}$$

Si on connait «ξ_1» (correspondant à ω_1) et «ξ_2» (correspondant à ω_2)

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$
$$a_1 = \frac{2(\xi_1\omega_1 - \xi_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{8.25}$$

Les mêmes propriétés que la matrice K

iii. Développement de la matrice C.

Quelques valeurs de l'amortissement de la littérature:

Portique en béton armé	2 à 15%
Murs porteurs et préfabriqués	5 à 20%
Structure métallique (Halle…)	2 à 6%
Ponts en béton armé	3 à 15%
Ponts métalliques	2 à 10%
Constructions massives	5 à 10%
Sol de fondation	5 à 40%

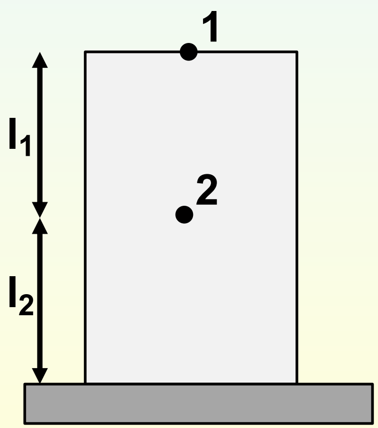
iv. Développement de la matrice M.

02 approches:

1. Par concentration
2. Par masse cohérente

1. Méthode de la masse concentrée.

Exemple 1 : masse définie par unité de longueur



$$m_1 = \bar{m}\frac{l_1}{2}$$

$$m_2 = \bar{m}\frac{l_1}{2} + \bar{m}\frac{l_2}{2}$$

$\bar{m}$ (kg/m) : masse / unité de longueur

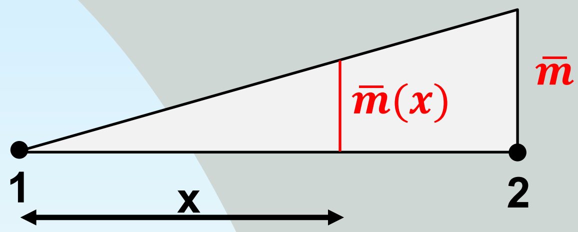
- La masse est concentrée au nœud.
- L'effet de l'inertie associé aux translations verticales (cas des poutres) et horizontales (cas des portiques) sont considérées.
- L'effet d'inertie associé aux rotations est négligé

Matrice diagonale

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

iv. Développement de la matrice M.

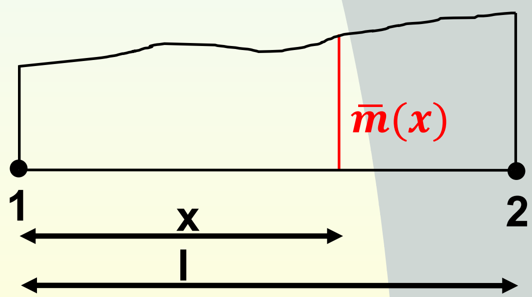
Exemple 2 : masse triangulaire



$$m_1 = \bar{m}\frac{l}{6}$$

$$m_2 = \bar{m}\frac{l}{3}$$

Exemple 3 : masse générale



$$m_1 = \frac{\int_0^l (l - x)\,\bar{m}(x)\,dx}{\int_0^l \bar{m}(x)dx}$$

$$m_2 = \frac{\int_0^l (x)\,\bar{m}(x)\,dx}{\int_0^l \bar{m}(x)dx}$$

2. Méthode de la masse cohérente

- La matrice est pleine
- Il y a un couplage entre les DDL de la structure
- Sa construction est plus laborieuse que celle de la masse concentrée
- Numériquement, un problème de plus

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ni} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dans la pratique, on utilise souvent la masse concentrée.
- C'est suffisant.

Avec: $m_{ij} = \int_0^l \bar{m}(x)\psi_i(x)\, \psi_j(x)dx$

Où: $\psi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ sont les équations de la courbe de déflection pour les DDL i et j

Pour plus de détails, voir la méthode des éléments finis

Les mêmes propriétés que les matrices K et C

Merci. **Fin du chapitre 8**

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Partie 2 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chap. 9

Mouvement libre non amorti des SPDD

COURS 9