

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

E-mail: [abdellatif\\_megnounif@yahoo.fr](mailto:abdellatif_megnounif@yahoo.fr)

**Chap. 7**

## **Notion de Spectres de Réponse**

# 1. Introduction

Rappel équation du mouvement

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Dans ce chapitre  $p(t)$  représente l'effet d'une accélération du support.

Généralement, un séisme mesuré par des appareils enregistreurs (sismographes)

- ❖ Force extérieure:  
Accélération du support  
 $p(t) \neq 0$  (forcée)
- ❖ Déplacement et/ou vitesse initiales connues (**nulles** ou **non nulles**)

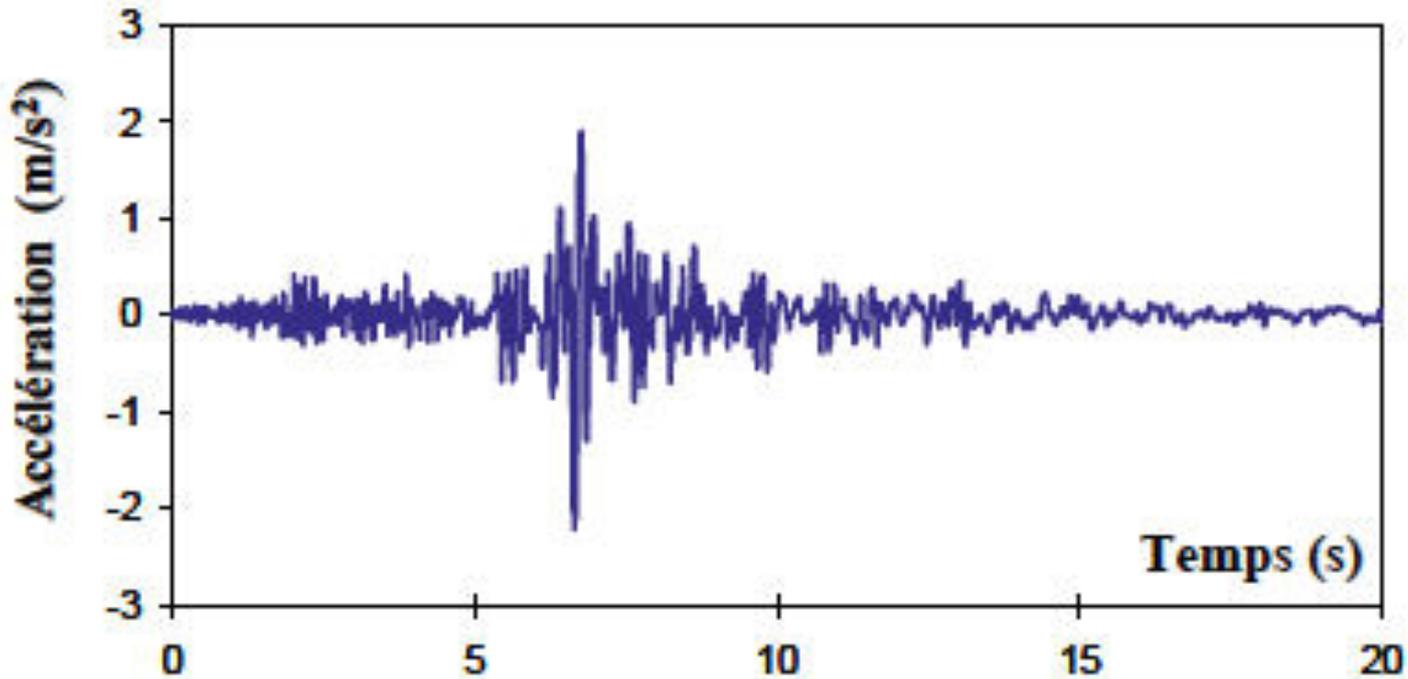


## Réponse

Vibration forcée de la structure

- ❖ Mouvement amorti forcé
- ❖ L'accélération du support ajoute une inertie supplémentaire au système.
- ❖ Solution par intégrale de Duhamel ou par la méthode Pas-à-pas.
- ❖ On s'intéresse généralement à la valeur maximale du déplacement

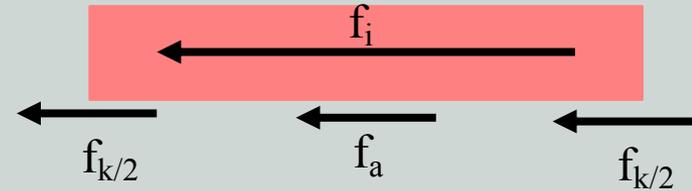
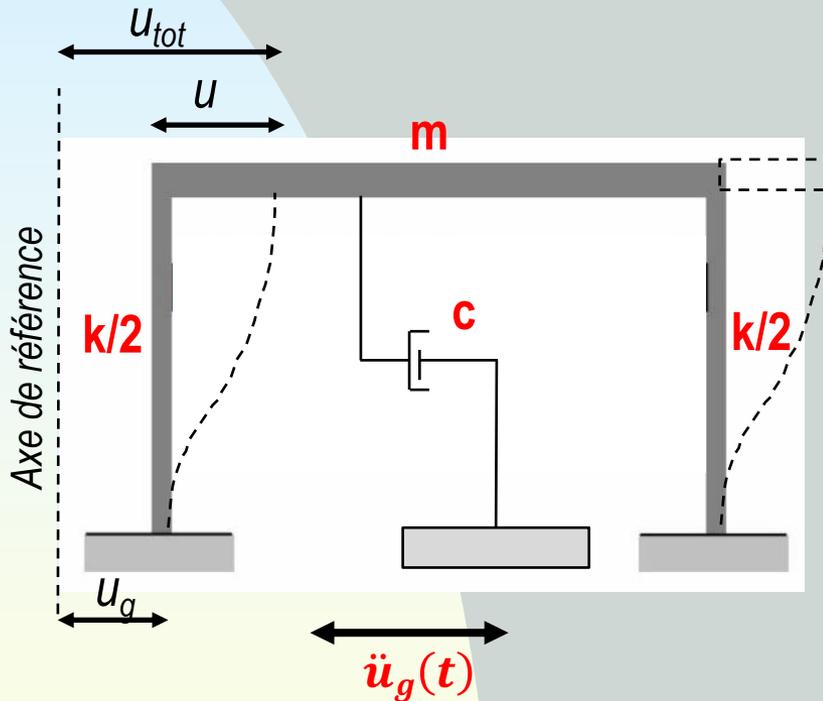
## Exemple d'un accélérogramme



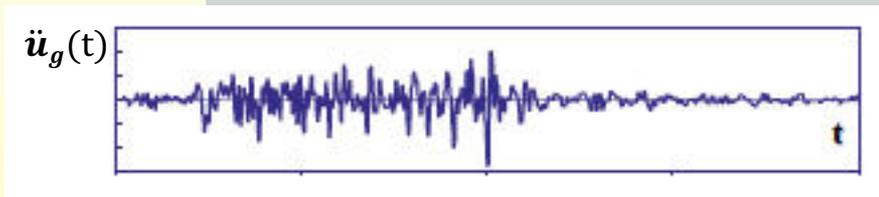
Accélérogramme de Lake Hughes (Northridge 1994)

# 2. Equation du mouvement

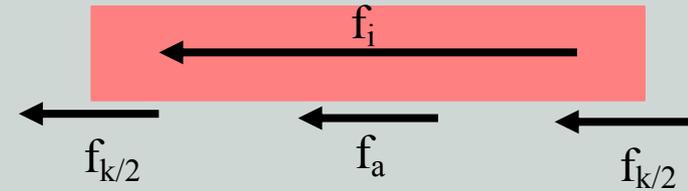
Rappel (Chapitre 2, paragraphe 6)



- ✓ Poutre très rigide.
- ✓ Masse totale concentrée sur la poutre.
- ✓ Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement.
- ✓ Seul DDL, possibilité de flexion des poteaux.



## Equation du mouvement



L'équation du mouvement:

$$f_i + f_a + f_k = 0$$

Avec :  $f_i = m \ddot{u}_{tot}$  ;  $f_a = c \dot{u}$  ;  $f_k = k u$

En remplaçant, on aura:

$$m \ddot{u}_{tot}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0$$

Or;  $u_{tot} = u_g + u$  D'où

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t) = p_{eff}(t) \quad (7.1)$$

Où  $p_{eff}(t)$  représente un chargement effectif dû à l'excitation des appuis.

## Equation du mouvement

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = -m \ddot{u}_g(t) = p_{eff}(t) \quad (7.1)$$

Sachant que:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\omega_0 m} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

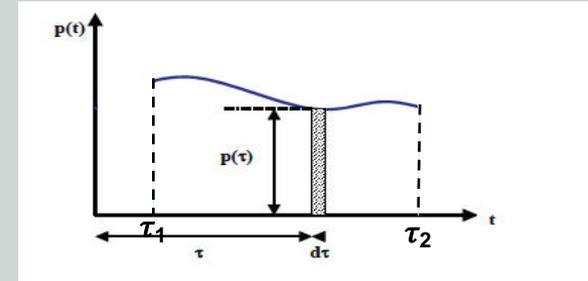
L'équation (7.1) devient:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (7.2)$$

**Ainsi:**

Toutes les méthodes de résolution déjà vues dans les chapitres précédents seront valables, il suffit de changer «  $p(t)$  » par «  $p_{eff}(t) = -m \ddot{u}_g(t)$  »

On peut par exemple utiliser **la méthode de l'intégrale de Duhamel** (Chap 6)



Il faut juste remplacer  $p(\tau)$  par «  $m \ddot{u}_g$  » dans les éq. (6.11), (6.12), (6.13) et (6.14) (Voir chapitre 6)

Exemple pour des CI nulles:

$$u(0) = u_{\tau=0} \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau=0}$$

**Non amorti**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau = \frac{-1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau \quad (7.3)$$

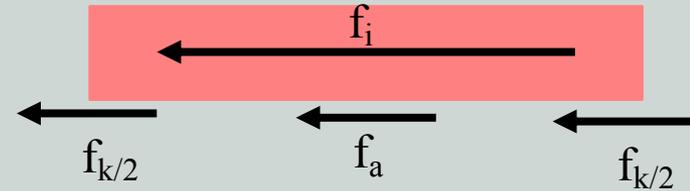
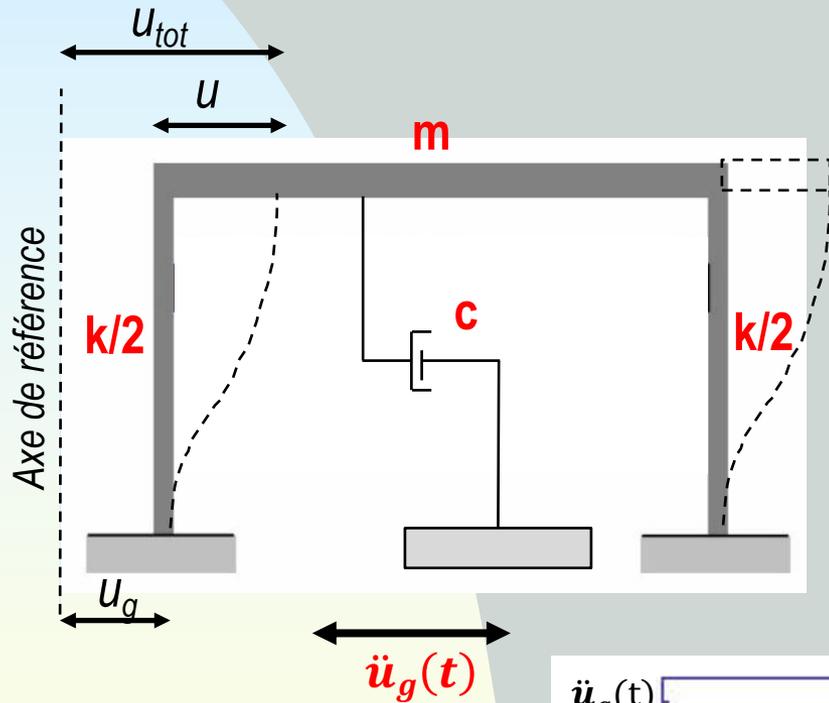
**amorti**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau = \frac{-1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau \quad (7.4)$$

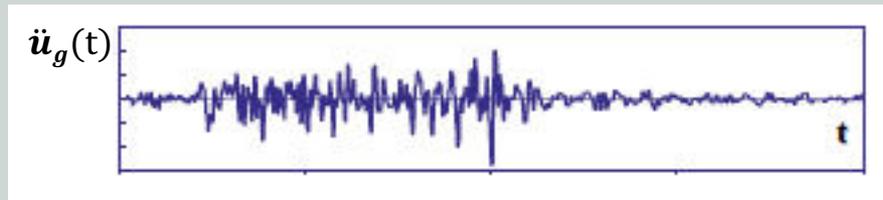
# 3. Influence de la période et de l'amortissement

## i. Influence de la période

«  $T$  » varie et «  $\xi$  » constant ( $\xi = 2\%$ )



- ✓ Poutre très rigide.
- ✓ Masse totale concentrée sur la poutre.
- ✓ Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement.
- ✓ Seul DDL, possibilité de flexion des poteaux.



Accélérogramme de Lake Hughes (Northridge 1994)

### Equation du mouvement

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + ku(t) = -m \ddot{u}_g(t)$$

La solution par l'intégrale de Duhamel, en supposant

$$u(0) = u_{\tau_1=0} \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{u}_{\tau_1=0}$$

**amorti**

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi \omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau$$

Les solutions ont été déterminées pour 03 valeurs de T.

$T_1 = 2 \text{ s}$ ;  $T_2 = 1 \text{ s}$  et  $T_3 = 0.5 \text{ s}$ . pour un  $\xi = 2\%$

(Voir courbes)

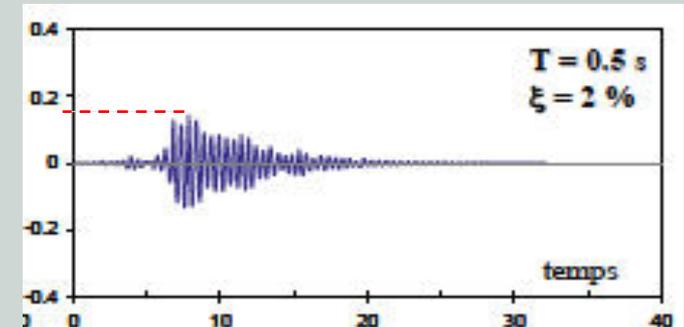
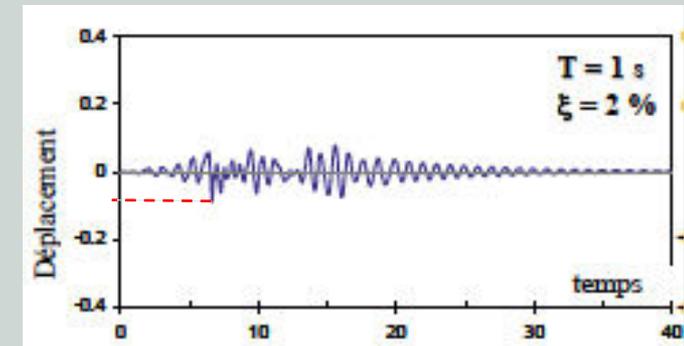
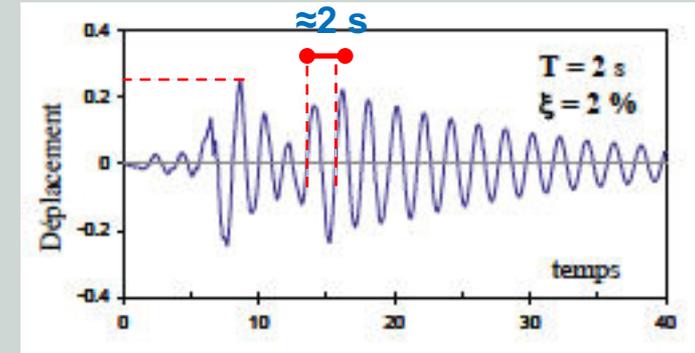
## Influence de la période et de l'amortissement

### i. Influence de la période

L'amplitude, la durée et la forme de la réponse dépendent fortement de la période propre du système.

Réponse de façon quasi harmonique avec une période égale à celle du système.

Pour  $T \nearrow$  ( $T=2s$ ) u  $\nearrow$  ce n'est pas une règle générale. Ceci est valable uniquement pour une certaine gamme de périodes



## ii. Influence de l'amortissement

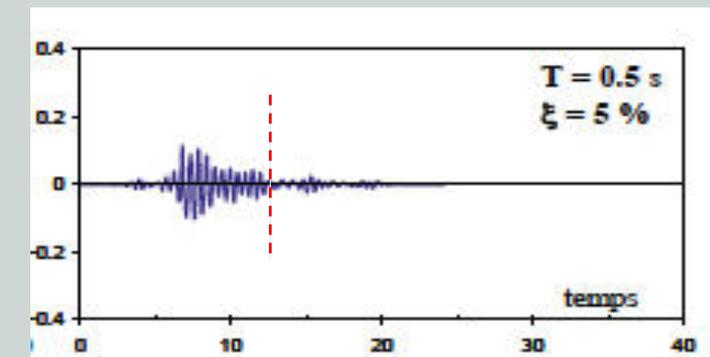
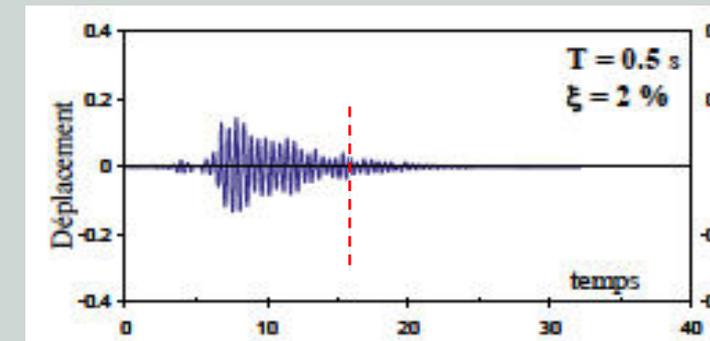
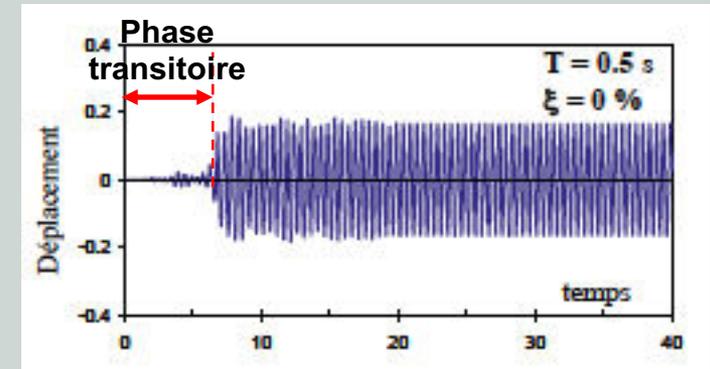
«  $\xi$  » varie et «  $T$  » constant ( $T = 0.5 \text{ s}$ )

Pour  $\xi = 0$  (système non amorti), après une certaine période (généralement ça correspond à la phase transitoire), la réponse est stationnaire avec une amplitude constante (la plus élevée)

Pour  $\xi \neq 0$  l'amplitude maximale diminue pour s'annuler après la phase d'excitation forcée ( $t > 10-15 \text{ s}$ ).

Elle s'annule rapidement pour des  $\xi$  élevés.

Pour  $\xi \neq 0$  la forme des réponses sont similaires.



# 4. Pseudo Accélération et pseudo vitesse

Sachant que la solution de l'équation de mouvement est obtenue par:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau$$

On peut calculer la force élastique

$$f_k(t) = k u(t) \quad \text{Or} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{D'où} \quad f_k(t) = m \omega_0^2 u(t) = m A(t) \quad (7.5)$$

$A(t)$  la dimension d'une accélération est appelée « **pseudo-accélération** »

A ne pas confondre avec l'accélération du système

$$\text{On sait que (eq. 7.2):} \quad \ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

$$\text{D'où} \quad \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) = -\omega_0^2 u(t) - 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) \quad (7.6)$$

La différence entre les 02 accélération est l'effet de l'amortissement.

Si  $\xi = 0$ , alors  $A(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$  (pseudo = système)



Sachant que la solution de l'équation de mouvement est obtenue par:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau$$

On peut aussi définir de façon équivalente, une pseudo-vitesse,  $V(t)$

$$V(t) = \omega_0 u(t) \quad (7.7)$$

$V(t)$  la dimension d'une vitesse est appelée « **pseudo-vitesse** »

A ne pas confondre avec la vitesse du système

On sait que (eq. 7.2):  $\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t)$

D'où 
$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{2\xi} \omega_0 u(t) - \frac{1}{2\xi} (\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)) \quad (7.8)$$

On peut écrire:

$$A(t) = \omega_0 V(t) = \omega_0^2 u(t) \quad (7.9)$$

# 5. Notion de spectre de réponse

On a supposé que les caractéristiques ( $m$ ,  $k$  et  $c$ ) **sont connues** et on calcule la réponse dynamique **maximale**.

Pour l'ingénieur, c'est **l'inverse**: On lui limite la réponse et on lui demande de déterminer les caractéristiques.

De plus, il n'est pas nécessaire de retenir toute **la variation temporelle** des réponses.

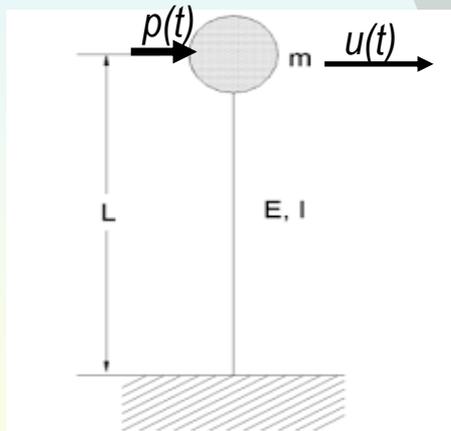
On a souvent recours aux valeurs **maximales** seulement.

La notion de **spectre de réponse** permet d'accéder directement à la réponse maximale

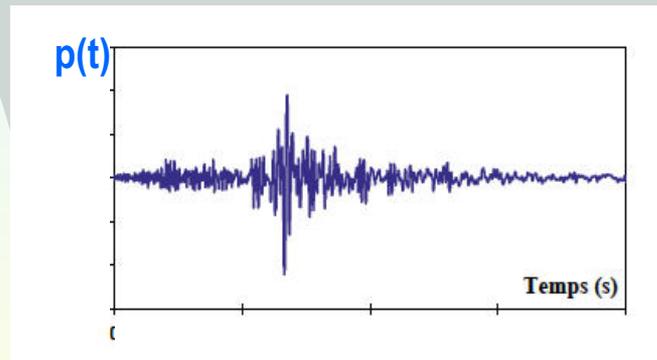
## Notion de spectre de réponse

**Définition :** Un spectre de réponse est une **courbe** représentant la variation de la **réponse maximale** (Déplacement, vitesse, contraintes,...) d'un système à 1 SDDL à un chargement donné par rapport à **un paramètre propre** du système (généralement la fréquence ou période propre).

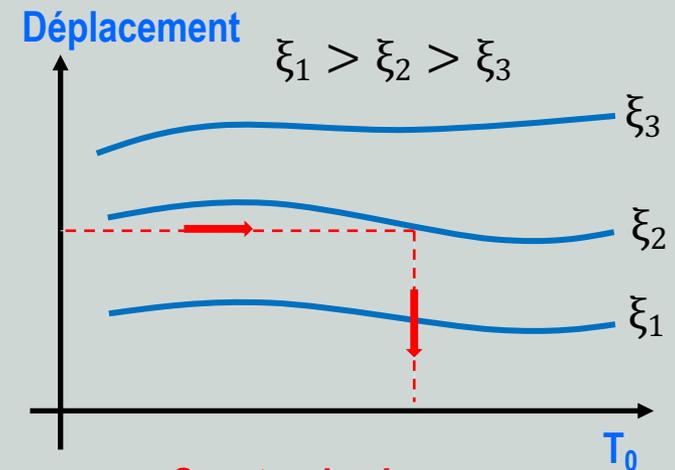
On peut tracer sur le même graphe une série de courbe en fonction de la valeur de l'amortissement.



Système 1 SDDL



Force d'excitation

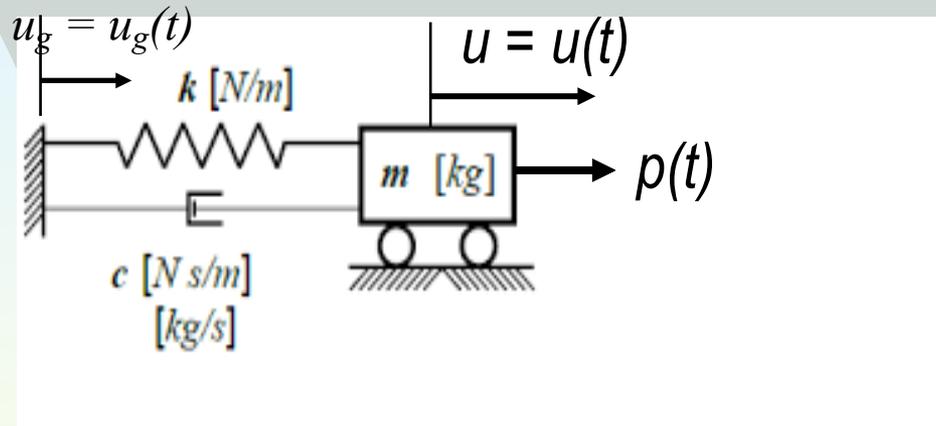


Spectre de réponse

La valeur de la période propre tirée, permet de déterminer la rigidité si on a la masse du système.

**Le choix du maximum parmi les maxima locaux pour la construction du spectre ? Une attention particulière**

Supposons le système suivant:



En posant le déplacement relatif  $\delta = u - u_g$  (7.10)

L'équation du mouvement s'écrit

$$m \ddot{\delta}(t) + c \dot{\delta}(t) + k \delta(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad (7.11)$$

Le coefficient d'amplification dynamique s'écrit (Eq. 4.24, cas de l'accéléromètre)

$$D(t) = R(t) = \frac{k\delta(t)}{-m\ddot{u}_{gmax}} = -\omega_0^2 \frac{\delta(t)}{\ddot{u}_{gmax}} \quad (7.12) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Supposons des CI nulles ( $\delta(0) = 0$  et  $\dot{\delta}(0) = 0$ ) et en posant,  $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{gmax} f(t)$ , on peut exprimer R(t) sous forme de l'intégrale de Duhamel.

On rappelle les équations de Duhamel (Eq. 6.11 et 6.13)

**Non amorti**

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_{\tau_1}}{\omega_0}\right) \sin\omega_0(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) \cos\omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

**Amorti**

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} (\dot{u}_{\tau_1} + \xi\omega_0 u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \sin\omega_a(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \cos\omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau$$

Dans notre cas:

$$D(t) = R(t) = \frac{k\delta(t)}{-m\ddot{u}_{gmax}} = -\omega_0^2 \frac{\delta(t)}{\ddot{u}_{gmax}}$$

Non amorti

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_{\tau_1}}{\omega_0}\right) \sin\omega_0(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) \cos\omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_0} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau$$

$$R(t) = \frac{\omega_0}{m} \int_{\tau_1}^t p(\tau) \sin(\omega_0(t - \tau)) d\tau \quad (7.13)$$

Amorti

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} (\dot{u}_{\tau_1} + \xi\omega_0 u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \sin\omega_a(t - \tau_1) + (u_{\tau_1}) e^{-\xi\omega_0(t-\tau_1)} \cos\omega_0(t - \tau_1) + \frac{1}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau$$

$$R(t) = \frac{\omega_0^2}{m\omega_a} \int_{\tau_1}^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t - \tau)) d\tau \quad (7.14)$$

D'après (7.12)  $R(t) = -\omega_0^2 \frac{\delta(t)}{\ddot{u}_{gmax}}$  On peut écrire

$$\delta_{max} = \frac{1}{\omega_0^2} R_{max} \ddot{u}_{gmax}$$

(7.15)

## Il y a aussi, le problème de l'accélération maximale ?

Considérons l'équation (7.11)

$$m \ddot{\delta}(t) + c \dot{\delta}(t) + k \delta(t) = -m \ddot{u}_g(t)$$

Avec  $\delta = u - u_g$  On peut la réécrire

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{\delta}(t) + k \delta(t) = 0 \quad (7.16)$$

$\ddot{u}_{max}$ ?

D'après (7.15) et (7.16), on peut écrire

$$\delta_{max} = \frac{1}{\omega_0^2} R_{max} \ddot{u}_{gmax}$$

$$\ddot{u}_{max} = \frac{k}{m} \delta_{max} = \omega_0^2 \delta_{max} = R_{max} \ddot{u}_{gmax} \quad (7.17)$$

Ainsi le déplacement relatif maximal ( $\delta_{max}$ )(7.15) et l'accélération absolue maximale ( $\ddot{u}_{max}$ )(7.17) sont reliées à l'accélération maximale du support ( $\ddot{u}_{gmax}$ ) .

$\ddot{u}_{gmax}$  Peut être déterminée à partir des équations de R(t) (Duhamel) 5(7.13) et (7.14) non amorti ou amorti

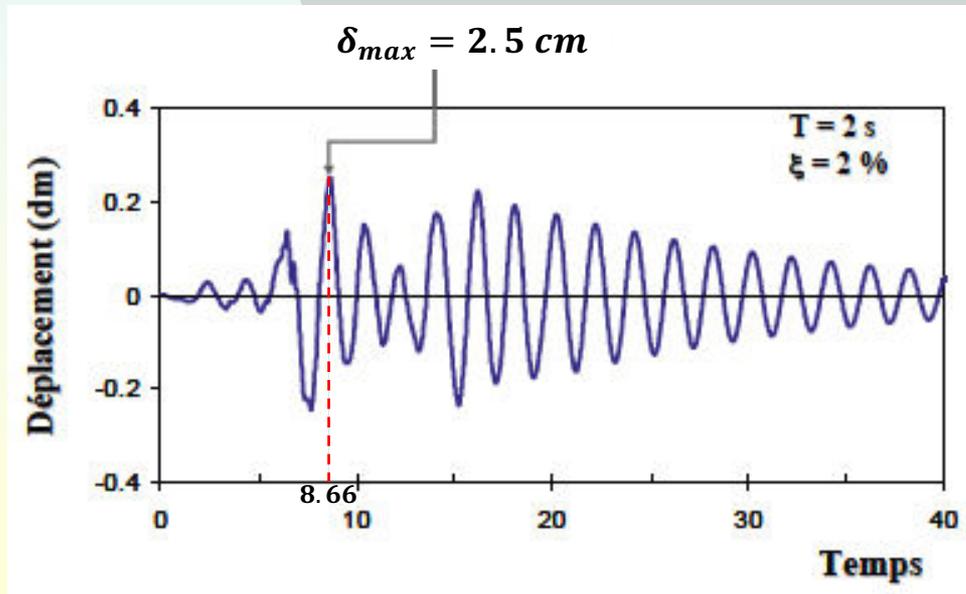
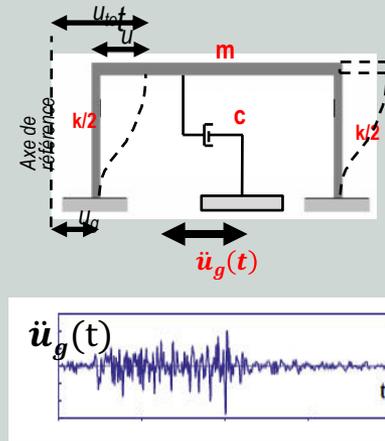
# 6. Comment construire les spectres ?

Rappel de la réponse en fonction du temps

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau$$

On s'intéresse uniquement à la valeur maximale pour le spectre

Traisons ceci à partir de l'exemple du paragraphe 3 et prenons le cas où « **T=2s** » et «  **$\xi = 2\%$**  ».



Déplacement relatif «  $\delta_{max}$  » et non le déplacement absolu «  $u_{max}$  » pour  $t=8.66s$ .

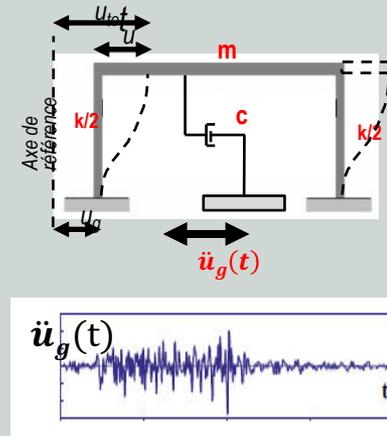
Ainsi on aura 01 point  $\delta_{max}(T, \xi, t)$

On note  $S_D(T, \xi) = \delta_{max}(T, \xi, t)$  (7.18)

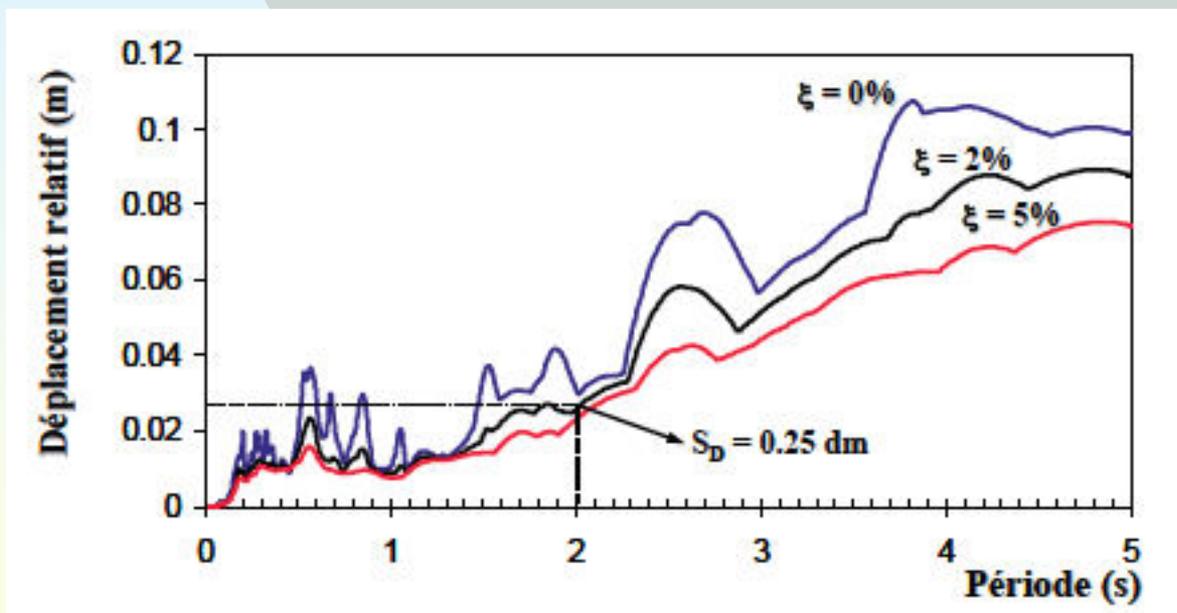
On peut répéter l'opération pour plusieurs T et  $\xi$ , on obtiendra plusieurs points pour tracer les courbes (période en fonction des déplacements relatifs)

## Comment construire les spectres ?

En traçant les courbes  $S_D(T, \xi) = f(T)$  pour les différentes valeurs de «  $\xi$  », on obtient



## Les spectres de réponse en déplacement



Courbe valable uniquement pour la sollicitation considérée (Graphe en haut)

On peut s'intéresser aussi à l'accélération. En revenant au paragraphe 4, la pseudo-accélération (7.5)

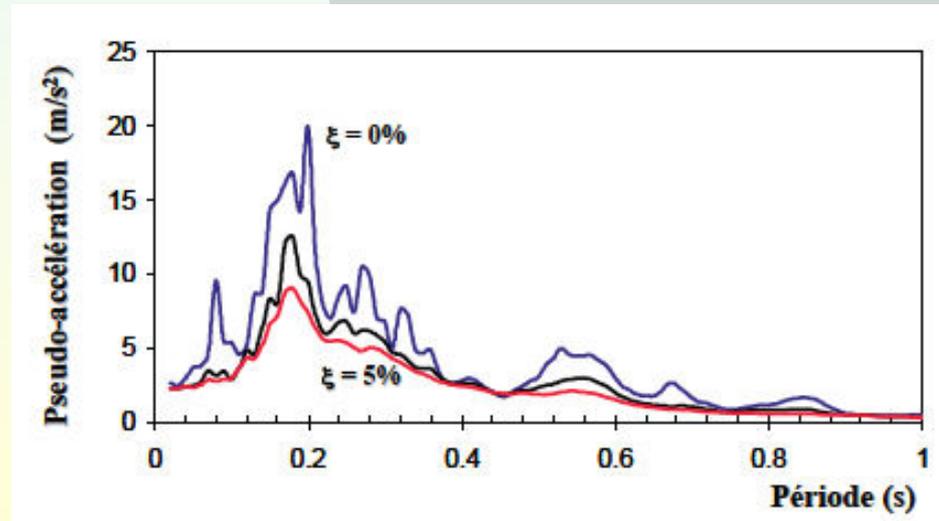
$$A(t) = \omega_0^2 u(t)$$

En passant par les max, on peut donc écrire

$$S_A(T, \xi) = \omega_0^2 \delta_{max}(T, \xi, t) = \omega_0^2 S_D(T, \xi) \quad (7.19)$$

En répétant l'opération et en traçant les courbes pseudo accélération en fonction des périodes, pour plusieurs valeurs de «  $\xi$  », on obtient

### Les spectres de réponse en pseudo-accélération



Courbe valable uniquement pour la sollicitation considérée.

On peut aussi s'intéresser à la vitesse. En revenant au paragraphe 4, la pseudo-vitesse (7.7).

$$A(t) = \omega_0 V(t) = \omega_0^2 u(t)$$

En passant par les max, on peut donc écrire

$$S_A(T, \xi) = \omega_0 S_V(T, \xi) = \omega_0^2 S_D(T, \xi) \quad (7.20)$$

En répétant l'opération et en traçant les courbes pseudo vitesse en fonction des périodes, pour plusieurs valeurs de «  $\xi$  », on obtient

**Les spectres de réponse en pseudo-vitesse**

### En conclusion

Qlq soit le type de spectre qu'on utilise, de déplacement, de pseudo-accélération ou de pseudo-vitesse, on aura le même type d'information qui caractérise la charge d'excitation  $\ddot{u}_g$  (voir graphe)

A partir du spectre de pseudo-accélération, on peut, par exemple, calculer l'effort élastique maximal du système Eq. 7.5:

$$f_k(t) = m \omega_0^2 u(t) = m A(t)$$

On aura:

$$f'_{kmax} = m S_A(T, \xi) \quad (7.21)$$

Valeur valable pour la sollicitation considérée.

$m S_A(T, \xi)$  Représente une force statique équivalente à appliquer au système pour obtenir l'effort élastique maximal développé sous l'action de la force d'excitation considérée.

## En conclusion

On peut aussi, à partir du spectre de déplacement relatif, calculer l'effort élastique maximal du système :

$$f_{kmax} = k S_D(T, \xi) \quad (7.22)$$

Les valeurs  $f'_{kmax}$  et  $f_{kmax}$  (7.21) et (7.22), sont les mêmes due à, l'équation (7.20),  $S_A(T, \xi) = \omega_0 S_V(T, \xi) = \omega_0^2 S_D(T, \xi)$

$$f'_{kmax} = m S_A(T, \xi) = m \omega_0^2 S_D(T, \xi) = k S_D(T, \xi) = f_{kmax}$$

Dans ces approches, le système est étudié sous l'effet d'une force appliquée de façon statique.

**Méthode statique équivalente** : la base de la plupart des règles parasismiques (y compris RPA)

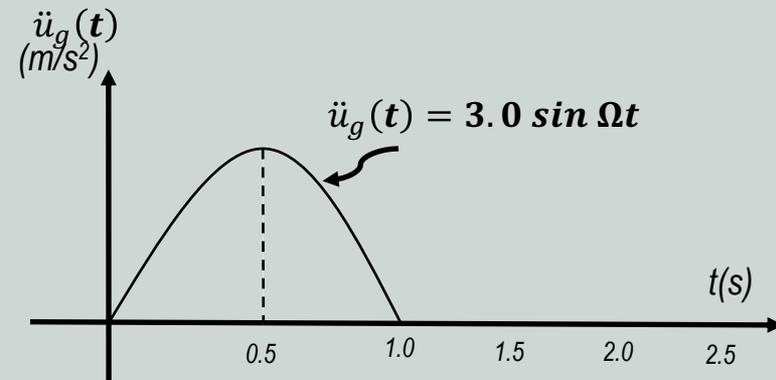
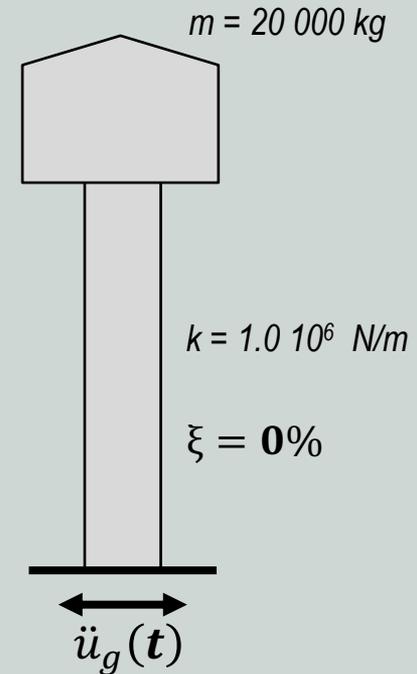
## Spectre de réponse

### Exemple 1

Considérons le château d'eau de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à une excitation du support donnée par son graphe de variation de l'accélération du support par rapport au temps. En supposant que l'amortissement est négligé,

- i) Tracer les spectres de réponses de déplacement, de pseudo-vitesse et de pseudo-accelération correspondants à l'excitation.
- ii) Calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant à la valeur critique de la section du château. Discuter les conséquences de changement de la section transversale sur les niveaux des forces de conception. En tant que concepteur, est ce que vous recommandez du changement de la section transversale.

Rem : Il ne faut pas calculer les sections. Les arguments seront basés sur un raisonnement qualitatif



## Spectre de réponse Exemple 1

Chargement en 02 phases:

Phase 1:  $0 < t < 1.0$  s

Système soumis à une charge sinusoidale (Voir Chap 5)

Eq. mouvement  $m \ddot{u}_1(t) + k u_1(t) = -m \ddot{u}_g(t) = -m u_{g0} \sin \Omega t$

Solution

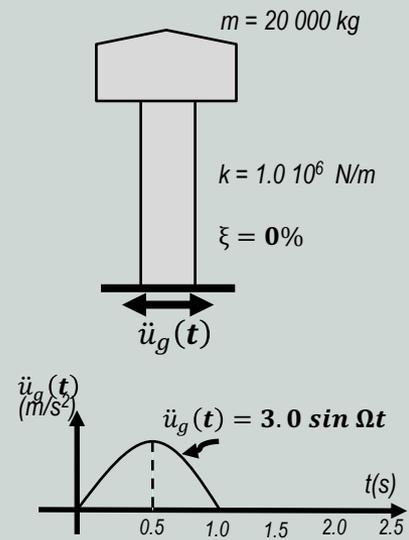
$$u_c(t) = [(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)] \quad u_p(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} \sin(\Omega t)$$

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} \sin(\Omega t) + [(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)]$$

Avec des CI nulles, on aura

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} [\sin(\Omega t) - r \sin \omega_0 t]$$

Avec  $\frac{P_0}{k} = \frac{m u_{g0}}{k} = \frac{u_{g0}}{\omega_0^2}$



Phase 1:  $0 < t < 1.0$  s

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} [\sin(\Omega t) - r \sin \omega_0 t]$$

Max, pour la dérivée nulle, soit

$$\dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} [\Omega \cos(\Omega t) - r \omega_0 \cos \omega_0 t] = 0$$

Soit :  $\cos(\Omega t) = \cos \omega_0 t$  Avec  $\Omega = \pi$

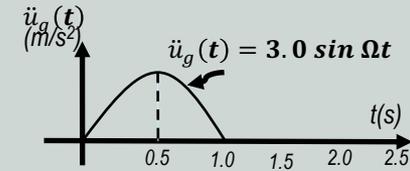
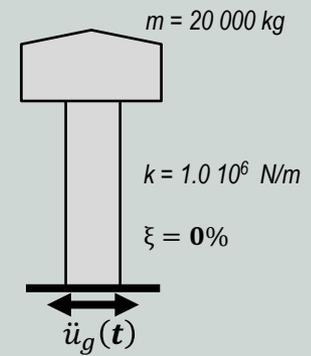
Soit  $\cos \Omega t = \cos \omega_0 t$  D'où  $\Omega t = 2\pi n \pm \omega_0 t$

Pour  $t \leq t_1$  or  $t_1 = T_p/2 =$  d'où  $\Omega t \leq \pi$

En considérant le 1<sup>er</sup> terme  $t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0}$  où  $t_{max} \leq t_1$  i.e  $r < 1$

On aura: pour  $r < 1$   $u_{1max} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} (\sin \Omega t_{max} - r \sin \omega_0 t_{max})$

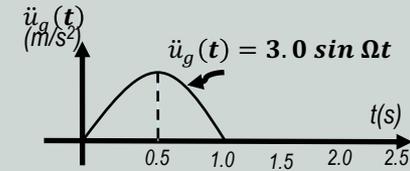
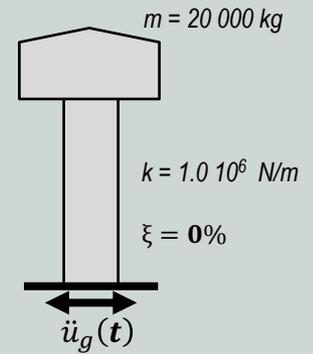
Ainsi.  $u_{1max}$  est fonction de T. On peut tracer la courbe pour plusieurs valeurs de T.



Phase 1:  $0 < t < 1.0$  s

pour  $r < 1$  
$$u_{1max} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1-r^2} (\sin \Omega t_{max} - r \sin \omega_0 t_{max}) \quad t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0}$$

Avec 
$$\frac{P_0}{k} = \frac{m u g_0}{k} = \frac{u g_0}{\omega_0^2}$$



T(s)	$\omega_0$ (rd/s)	$r = \Omega / \omega_0$	t(s) à $\dot{u}_1 = 0$	$u_{1max}$ (m)
0.5	12.57	0,25	0,400	<b>0,0241</b>
1.0	6.28	0,5	0,667	<b>0,1316</b>
1.5	4.19	0,75	0,857	<b>0,2967</b>
2.0	3.14	1	1,000	<b>Résonance</b>

## Spectre de réponse Exemple 1

### Phase 2: $t > 1.0$ s

Système en mouvement libre non amorti

$$\text{Eq. mouvement} \quad m \ddot{u}_2(t) + k u_2(t) = 0$$

$$\text{Solution} \quad u_2(t) = \left[ u_{t1} \cos \omega_0(t - t_1) + \left( \frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0} \right) \sin \omega_0(t - t_1) \right]$$

Avec  $u_{t1}$  et  $\dot{u}_{t1}$  donnés par la 1<sup>ère</sup> phase

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} (\sin \Omega t_1 - r \sin \omega_0 t_1) \quad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k} \frac{\Omega}{1 - r^2} (\cos \Omega t_1 - \cos \omega_0 t_1)$$

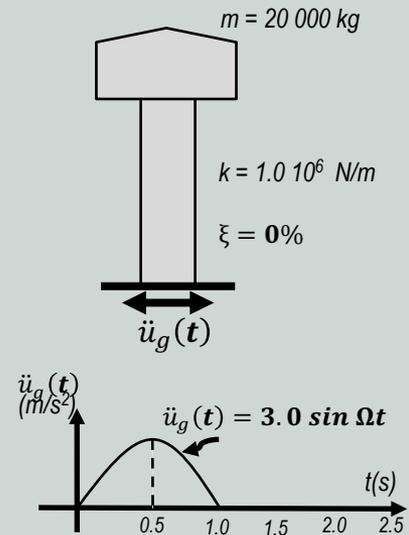
On aura Eq. 5.60, chap 5

$$u_2(t) = \left[ \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - r^2} (\sin \Omega t_1 - r \sin \omega_0 t_1) \cos \omega_0(t - t_1) + \frac{P_0}{k} \frac{r}{1 - r^2} (\cos \Omega t_1 - \cos \omega_0 t_1) \sin \omega_0(t - t_1) \right]$$

Et la réponse maximale sera Eq. 5.61:

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left( \frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0} \right)^2} = \frac{P_0}{k} \frac{r}{1 - r^2} \sqrt{\left[ 2 + 2 \cos \frac{\pi}{r} \right]}$$

pour  $r > 1$



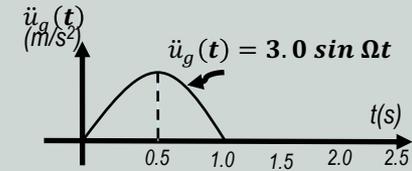
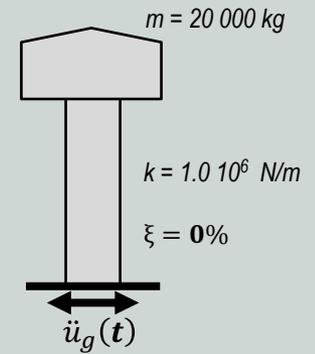
Phase 2:  $t > 1.0$  s

pour  $r > 1$  
$$u_{2max} = \frac{P_0}{k} \frac{r}{1 - r^2} \sqrt{\left[2 + 2 \cos \frac{\pi}{r}\right]}$$

Avec 
$$\frac{P_0}{k} = \frac{m u_{g0}}{k} = \frac{u_{g0}}{\omega_0^2}$$

On peut calculer,  $u_{2max}$  pour plusieurs valeurs de T.

T(s)	$\omega_0$ (rd/s)	$r = \Omega / \omega_0$	$u_{2max}$ (m)
2.5	2,51	1,25	<b>0,652</b>
3.0	2,09	1,5	<b>0,821</b>
6.0	1,05	3	<b>1,777</b>
100	0,06	50	<b>30,394</b>



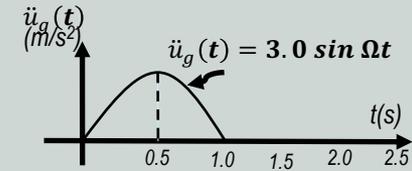
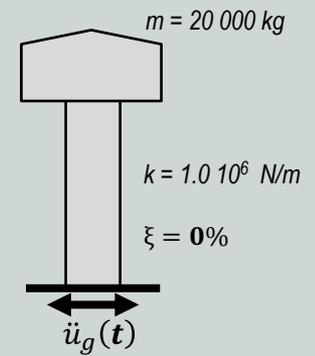
## Spectre de réponse Exemple 1

Pour les spectres, on a:

$$S_D = u m a_x ; S_A = -\omega_0^2 S_D \quad \text{et} \quad S_V = \omega_0 S_D$$

On aura pour les valeurs maximales calculées sur les 02 phases.

T(s)	$S_D$ (m)	$S_V$ (m/s)	$S_A$ (m/s <sup>2</sup> )
0.5	0,0241	0,303	3,806
1.0	0,1316	0,827	5,195
1.5	0,2967	1,243	5,206
2.0	Résonance		
2.5	0,652	1,639	4,118
3.0	0,821	1,719	3,601
6.0	1,777	1,861	1,949
100	30,394	1,910	0,120



## Spectre de réponse Exemple 1

On peut tracer sur la même figure les 03 spectres

$$S_D = u m a_x ; S_A = -\omega_0^2 S_D \quad \text{et} \quad S_V = \omega_0 S_D$$

On prend :  $S_V = \omega_0 S_D = \frac{2\pi}{T} S_D$

En passant par des échelles log, on aura

$$\text{Log } S_V = -\log T + \log (2\pi S_D)$$

Pour une valeur de  $S_D$  constante, On obtient une droite liant «  $\log S_V$  » à «  $\log T$  ».

De même, si on prend la pseudo-accélération

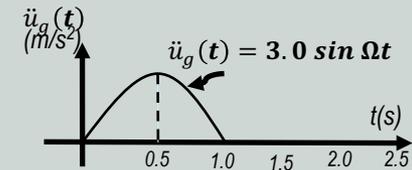
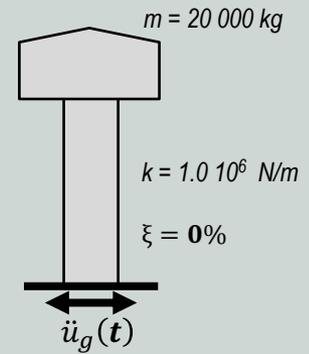
$$S_V = \frac{1}{\omega_0} S_A = \frac{T}{2\pi} S_A$$

En passant par des échelles log, on aura

$$\text{Log } S_V = \log T + \log \left( \frac{S_A}{2\pi} \right)$$

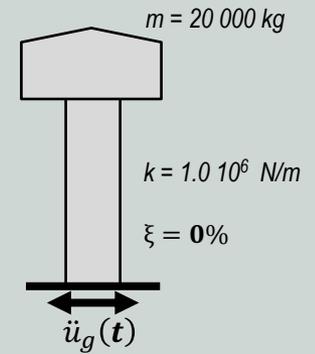
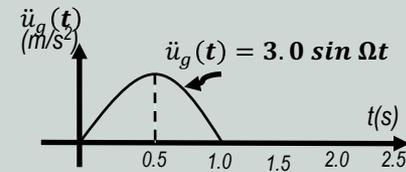
Qui est aussi, une droite pour une valeur de  $S_A$  constante.

Ainsi, on peut avoir pour chaque valeur constante de  $S_D$  (ou  $S_A$ ) une droite sur le graphe  $\log S_V - \log T$ . On aura ainsi ajouté le spectre de déplacement (ou de pseudo-accélération) avec le spectre de pseudo-vitesse.



## Spectre de réponse Exemple 1

Pour notre exemple, on aura, pour des valeurs différentes de  $S_D$  et  $S_A$ , le tableau suivant

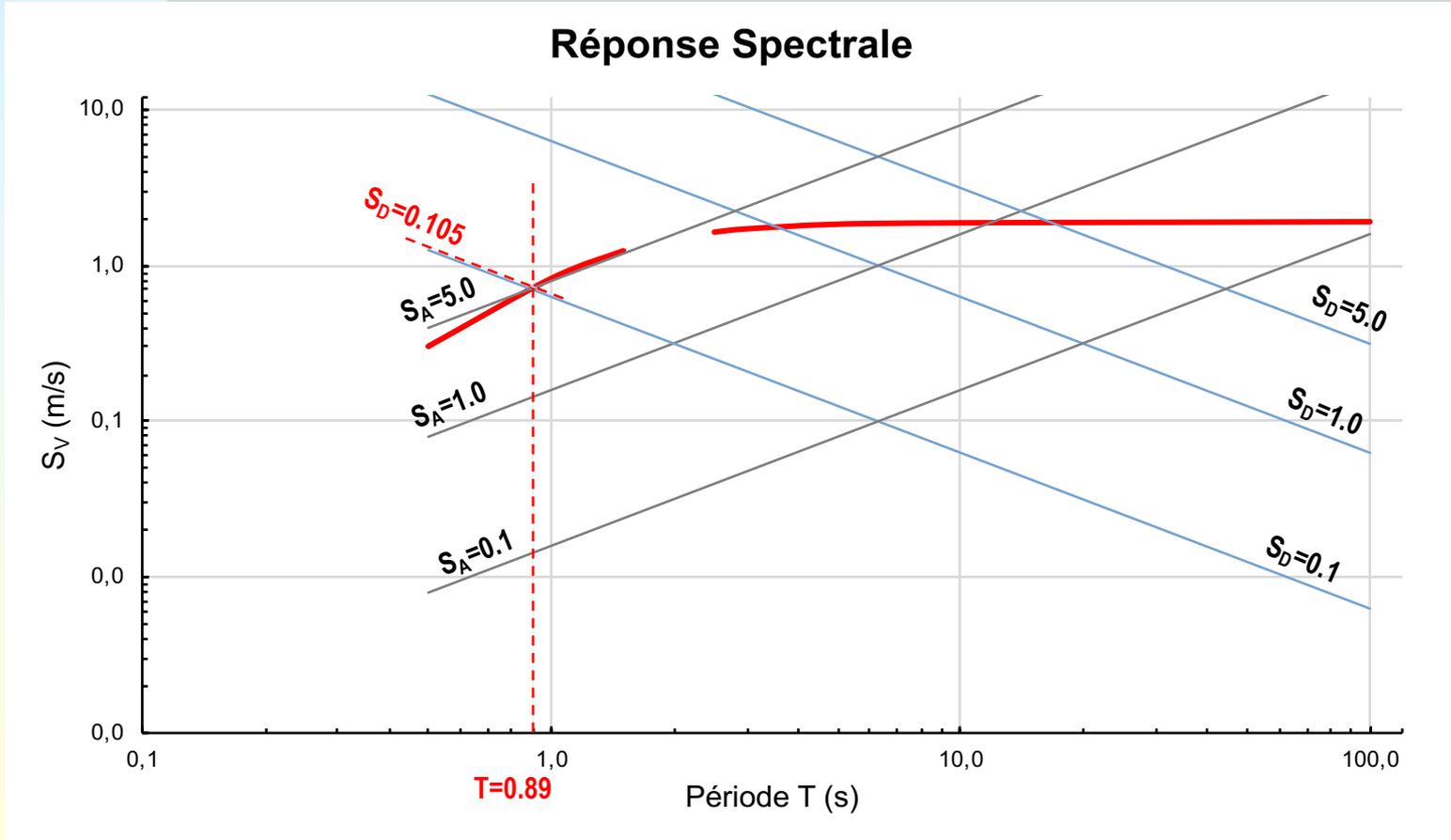
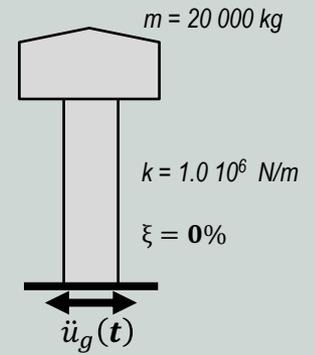
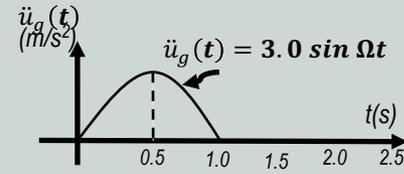


T(s)	$S_V$ (m/s)	$S_V$ (m/s) $S_D=0,1$	$S_V$ (m/s) $S_D=1,0$	$S_V$ (m/s) $S_D=5,0$	$S_V$ (m/s) $S_A=0,1$	$S_V$ (m/s) $S_A=1,0$	$S_V$ (m/s) $S_A=5,0$
0.5	0,303	1,257	12,566	62,832	0,0080	0,0796	0,3979
1.0	0,827	0,628	6,283	31,416	0,0159	0,1592	0,7958
1.5	1,243	0,419	4,189	20,944	0,0239	0,2387	1,1937
2.0		0,314	3,142	15,708	0,0318	0,3183	1,5916
2.5	1,639	0,251	2,513	12,566	0,0398	0,3979	1,9894
3.0	1,719	0,209	2,094	10,472	0,0477	0,4775	2,3873
6.0	1,861	0,105	1,047	5,236	0,0955	0,9549	4,7747
100	1,910	0,006	0,063	0,314	1,5916	15,9155	79,5775

On peut tracer toutes ces courbes sur un graphe log-log

# Spectres de réponse $S_V$ , $S_A$ et $S_D$

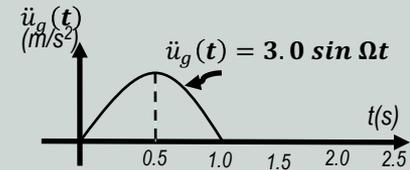
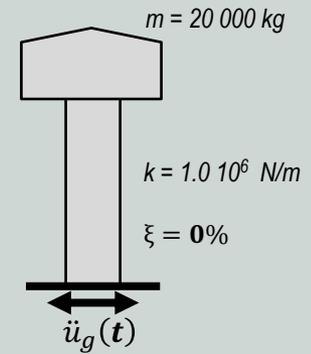
## Exemple 1



## Spectre de réponse Exemple 1

ii) Calculer la force de cisaillement et le moment fléchissant à la valeur critique de la section du château. Discuter les conséquences de changement de la section transversale sur les niveaux des forces de conception. En tant que concepteur, est ce que vous recommandez le changement de la section transversale.

Rem : Il ne faut pas calculer les sections. Les arguments seront basés sur un raisonnement qualitatif



On a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{20000}{1.0\,10^6}}$$

D'où  $T = 0,89\text{ s}$  Du spectre, on peut tirer «  $S_D = 0,105\text{ m}$  »

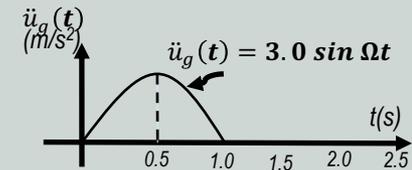
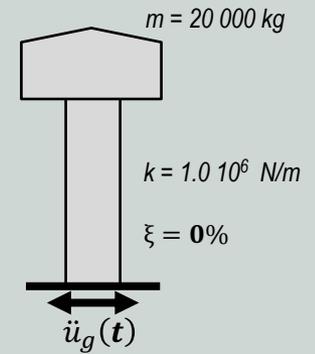
La force de cisaillement:  $V = k S_D = 1.0\,10^6 (0,105)$   $V = 105\text{ KN}$

Moment fléchissant :  $M = \frac{V}{2} h = \frac{105}{2} h$   $M = 52,5 h\text{ (KN.m)}$

## Spectre de réponse Exemple 1

ii) Calculer la force de cisaillement et le moment fléchissant à la valeur critique de la section du château. Discuter les conséquences de changement de la section transversale sur les niveaux des forces de conception. En tant que concepteur, est ce que vous recommandez le changement de la section transversale.

Rem : Il ne faut pas calculer les sections. Les arguments seront basés sur un raisonnement qualitatif



Considérons qlqs valeurs de  $k$  ? (la masse reste constante)

On aura:

K (N/m)	T (s)	V (KN)	$S_D$ (m)
$100 \cdot 10^4$	0,89	105	0,105
$35 \cdot 10^4$	1,50	103,6	0,296
$12 \cdot 10^4$	2,50	78,4	0,653

$K \searrow 88\% \Rightarrow V \searrow 25\%$   
 $\Rightarrow S_D \nearrow 520\%$

L'effort tranchant ne varie pas beaucoup avec la rigidité (pour une masse constante).

Par contre, le déplacement maximal varie de façon très considérable avec la rigidité.

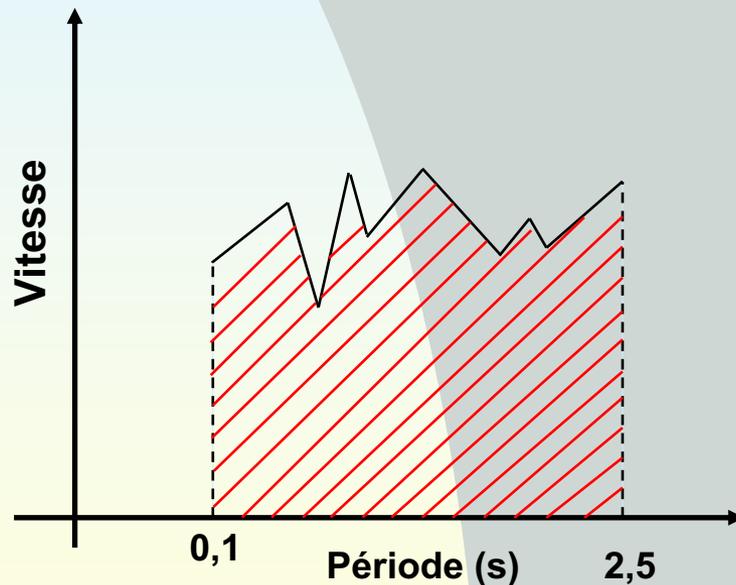
Il est recommandé de réduire la section transversale jusqu'à ce que les déformations du matériau soient acceptables. Par contre, on doit avoir une section transversale suffisante pour avoir la résistance exigée et la rigidité structurelle pour contrôler les déplacements.

# 7. Spectres de réponse normalisés, de calcul et réglementaires

- Un seul accélérogramme est insuffisant pour le calcul dynamique des structures (même s'il a été enregistré à côté du site).
- Car, le séisme est imprévisible et la variabilité du mouvement sismique est grande.
- Considérer un ensemble d'accélérogramme  $\ddot{u}_{gi}(t)$ .
- 02 structures différentes peuvent être soumises à des sollicitations défavorables différentes.
- Mais on peut définir un « **spectre enveloppe** » en calculant les spectres de réponse  $S_{Ai}(T, \xi)$  des sollicitations enregistrées dans des sites comparables du point de vue de la nature du sol (Genre de **banque de données**). Ce spectre donnera les efforts les plus élevés. Très utile pour les règlements parasismiques.
- On cherchera alors dans la BDD des séismes enregistrés, un enregistrement possédant un spectre de réponse identique ou voisin d'un spectre enveloppe.

- Les séismes sont d'importance différente et les spectres déduits ne sont pas généralement comparables.
- Il faut donc les **affiner** pour les rendre à même **valeur d'intensité spectrale**. On l'appelle le « **spectre normalisé** ».

### Définition de l'intensité spectrale (Housner)



L'intensité spectrale = Aire du spectre de pseudo-vitesse comprise entre  $T=0,1$  et  $T=2,5$  s.

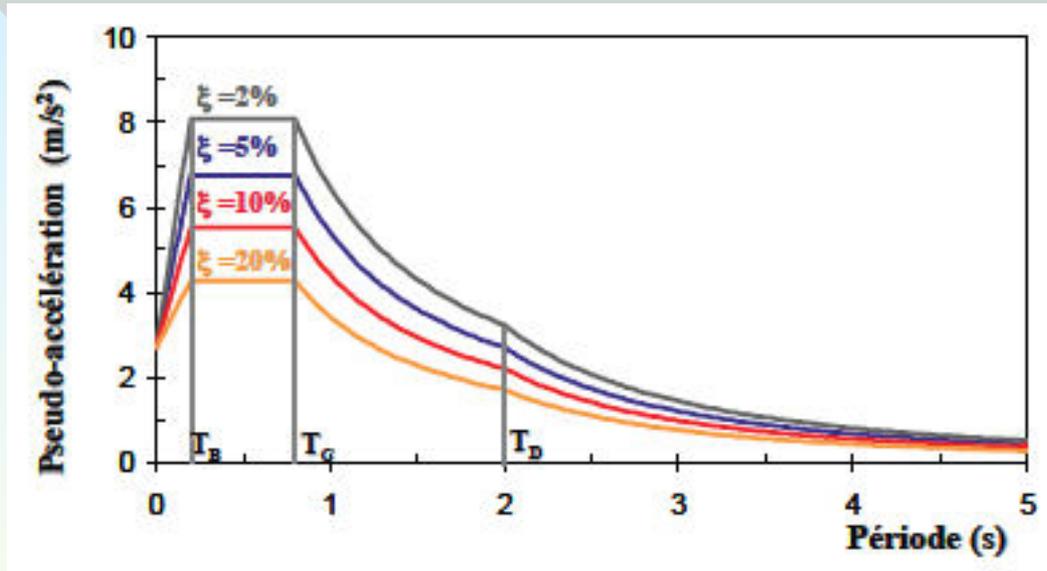
Cette plage de période couvre la plupart des cas rencontrés.

L'intensité spectrale prend en compte la réponse de la majorité des constructions et constitue une mesure de l'importance de la secousse sismique

On peut aussi normaliser les spectres en prenant en compte l'**accélération maximale du sol** au lieu de l'intensité spectrale

- L'**enveloppe** des différents spectres **normalisés** représente le « **spectre de calcul** » .
- Ce spectre doit aussi être « calé » pour tenir compte:
  - ✓ De l'intensité probable du séisme
  - ✓ De l'importance pour la collectivité du bâtiment étudié.
- Une fois calé, on le modifie pour tenir compte de l'intervention des modes supérieurs ou du comportement non-linéaire de la structure. On obtient le **spectre réglementaire** utilisé dans les règlements parasismiques.

## Exemple de spectres de réponse normalisés



Tous les spectres ont la même allure

Pour de faibles périodes, la pseudo-accélération croît linéairement jusqu'à une valeur d'amplification maximale atteinte à  $T_B$ .

Entre  $T_B$  et  $T_C$  la pseudo-accélération est constante et maximale.

Entre  $T_C$  et  $T_D$ , la pseudo-vitesse est constante (Pente presque la même), d'où la pseudo-accélération décroît en  $(1/T)$  (Eq. 7.20  $S_A(T, \xi) = \omega_0 S_V(T, \xi) = \omega_0^2 S_D(T, \xi)$ ).

Au-delà de  $T_D$ , le déplacement relatif est constant, d'où l'accélération décroît en  $(1/T^2)$  (Eq. 7.20)

**En considérant les points extrêmes.**

**Pour « T=0 »**

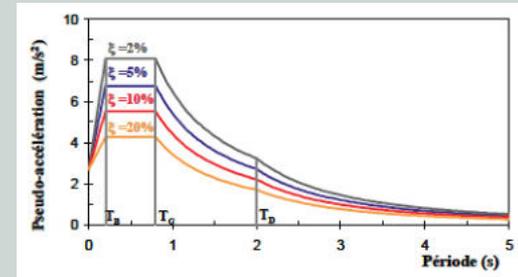
D'après l'éq. du mouvement,  $\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t)$

Si  $\omega_0 = \infty$ , la pseudo-accélération = l'accélération maximale du support, et le déplacement relatif devient nul. Pour tous les amortissements, toutes les courbes commencent par l'accélération maximale du support.

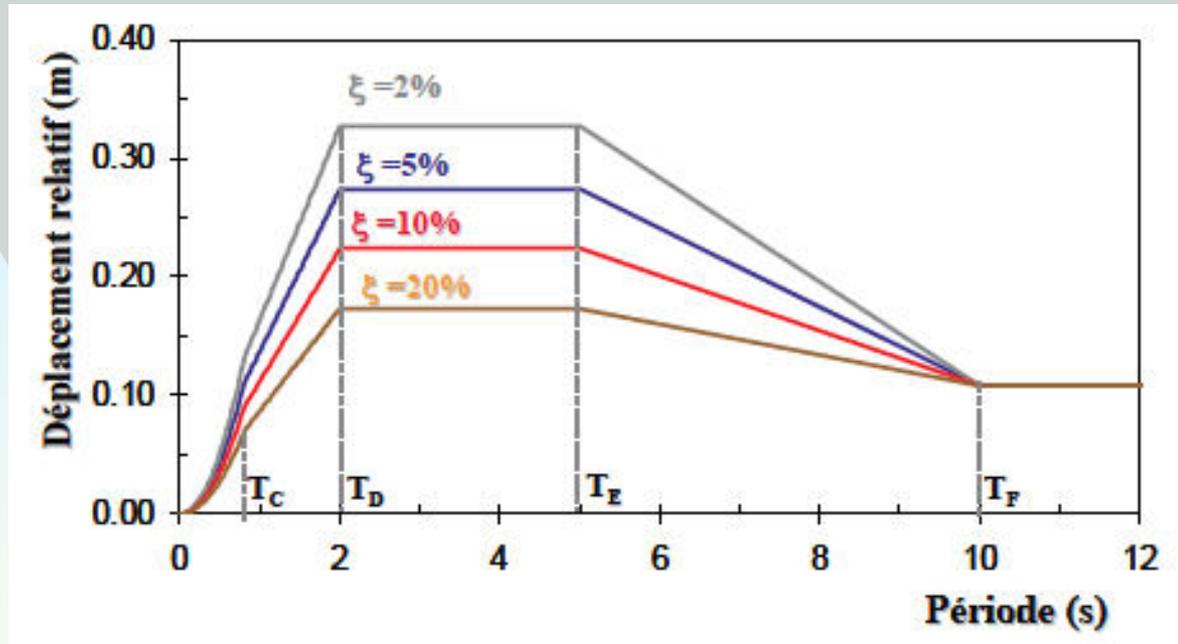
**Pour « T= ∞ »**

Le déplacement relatif  $S_D(\infty, \xi)$  tend vers le déplacement maximal du support  $u_{g\max}$ . Car, un système de période infinie correspond à une rigidité nulle, i.e c'est comme si la masse n'est pas connectée au support, donc elle reste immobile pendant l'excitation.

Le mouvement relatif de la masse = mouvement du support.



On peut aussi considérer le spectre normalisé en déplacements



Graphé obtenu à partir du graphe des accélérations, en utilisant l'équation (7.20)  $S_A(T, \xi) = \omega_0 S_V(T, \xi) = \omega_0^2 S_D(T, \xi)$

En pratique, (pour des enregistrements réels) on a constaté qu'à  $T_F=10$  s, la réponse = déplacement du sol.

Entre  $T_D$  et  $T_E$  les déplacements sont constants et maximums

**Merci. Fin du chapitre 7**

# *Dynamique des structures*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

## **Prochain Cours**

**Partie 2 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté**

### **Chap. 8**

**Formulations des équations de mouvement des systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL)**