Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 5

Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL:

Excitation Périodique, en Échelon, Impulsive

COURS 5 **Dimanche 23.10.2022**

1. Introduction

Rappel équation du mouvement

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Dans ce chapitre **$p(t) \neq 0$**

On s'intéresse uniquement aux forces périodiques puis aux forces impulsives

- **Force extérieure périodique (= se répète dans le temps) ou impulsive (=courte durée)**
- **$p(t) \neq 0$ (forcée)**
- **Déplacement et/ou vitesse initiales connues (nulles ou non nulles)**

Réponse

Vibration forcée de la structure

- **Mouvement selon la nature de l'excitation**
- **Pour périodique, superposition de plusieurs solutions due à la superposition des charges (Cas linéaire)**
- **Pour impulsive, l'amortissement n'aura pas le temps de se développer, durée d'excitation très courte.**

2. Principe de superposition

Valable uniquement pour les systèmes linéaires élastiques.

Solution utile si la force est complexe, sera décomposée en une somme de petites forces connues.

Rappel $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$

Soit $G[u(t)] = p(t)$ **où** $G[\ ] = m\dfrac{d^2}{dt^2} + c\dfrac{d}{dt} + k$ **(5.1)**

Pour 02 excitations différentes, on peut écrire:

$G[u_1(t)] = p_1(t)$ **et** $G[u_2(t)] = p_2(t)$

Posons: $p_{3(t)} = a_1 p_{1(t)} + a_2 p_2(t)$

Utilisons l'opérateur G[ ] :

$$G[u_3(t)] = a_1 G[u_1(t)] + a_2 G[u_2(t)] = G[a_1 u_1(t)] + G[a_2 u_2(t)]$$
$$= G[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)]$$

D'où $\boxed{u_3(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)}$

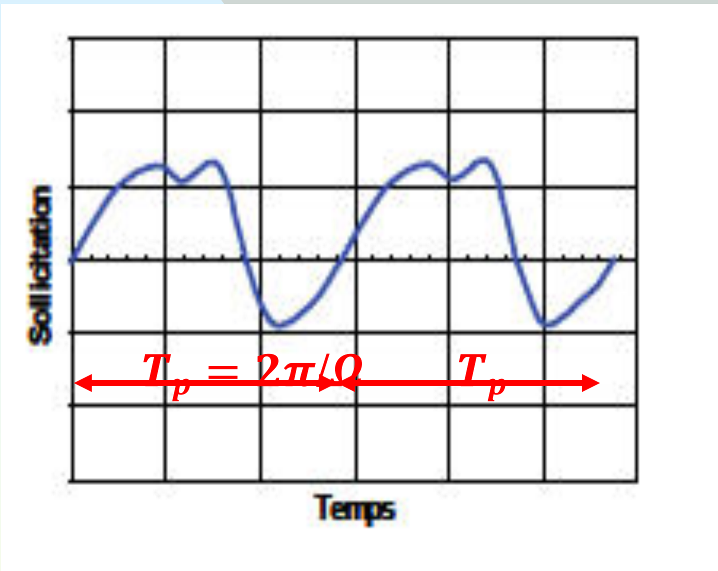
3. Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique

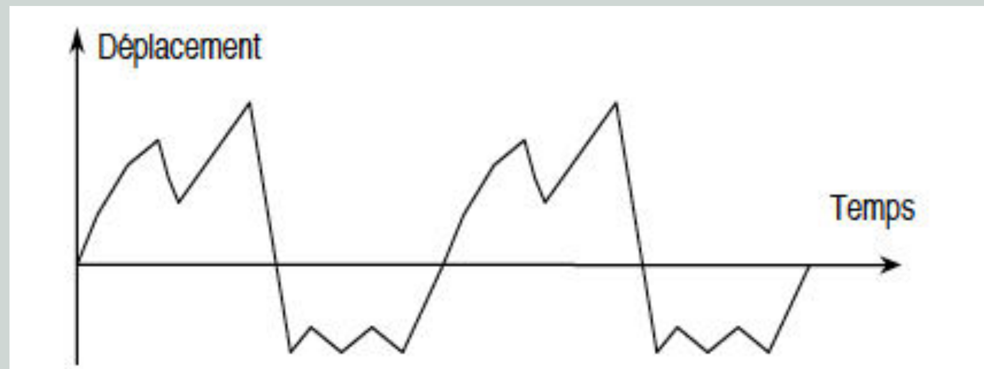
- **Elle se répète dans le temps**
- **Elle peut être développée en série de Fourier**
- **Elle peut s'écrire comme une somme de forces harmoniques $p_n(t)$.**
- **Chaque terme de la série donne une réponse harmonique.**
- **Dans le cas linéaire, on peut appliquer le principe de superposition.**
- **La réponse totale est la somme des réponses de chaque harmonique**

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) \qquad (5.2)$$

$T_p = 2\pi/\Omega$ **: La période de l'excitation périodique p(t)**
$T_n = 2\pi/n\Omega$ **: La période des harmoniques $p_n(t)$**

Exemple de fonction périodique

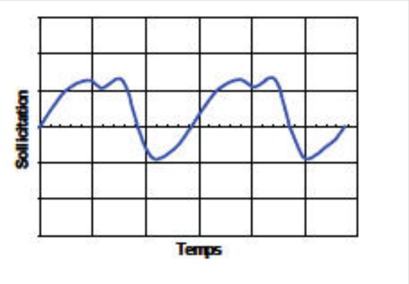




Ex. Un piéton sur une passerelle.

Cas spéciale : **les fonctions harmoniques**

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



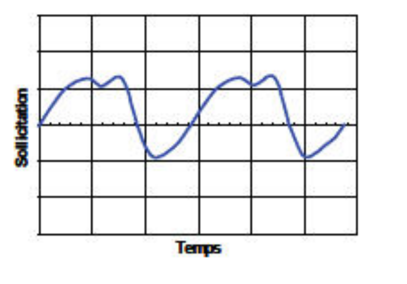
$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right)$$

- **Le choix des coefficients « a_i» n'est pas arbitraire.**
- **Il faut s'assurer de la bonne convergence de la série de Fourier vers la fonction p(t).**

D'où

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t)cos \frac{2\pi n}{T_p} t\, dt \qquad (5.3)$$
$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t)sin \frac{2\pi n}{T_p} t\, dt$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right)$$

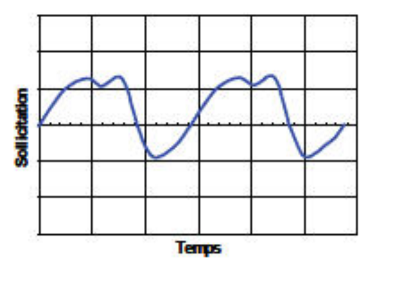
- On peut écrire la série en forme condensée en utilisant les nombres complexes.

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{\frac{2i\pi n}{T_p} t} \qquad (5.4)$$

Avec:

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \, e^{\frac{2i\pi n}{T_p} t} \, dt \qquad (5.5)$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right)$$

Réponse totale = Somme des réponses dues à chaque terme

Exemple: Système non amorti (On ne considère que la partie permanente)

Pour $p_1(t) = a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right)$ **On aura** $u_1(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - r_n^2} cos(n\Omega t)$ Voir éq. (4.8) **(5.6)**

Pour $p_2(t) = bnsin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right)$ **On aura** $u_2(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - r_n^2} sin(n\Omega t)$ **(5.7)**

Pour $p_3(t) = a_0$ **On aura** $u_3(t) = \frac{a_0}{k}$ **(5.8)** **Où** $r_n = \frac{n\Omega}{\omega_0} = n\, r_1$ **(5.9)**

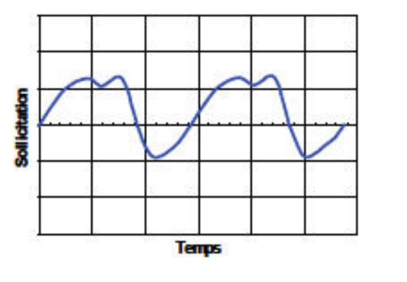
Ainsi, la réponse permanente totale pour un système non amorti soumis à une excitation périodique sera:

$$u(t) = \frac{1}{k}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - r_n^2} \left(a_n cos(n\Omega t) + bnsin(n\Omega t)\right)\right) \quad (5.10)$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique

Exemple: Système amorti

(On ne considère que la partie permanente)



Pour $p_1(t) = a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$ On aura $u_1(t) = \frac{a_n}{k} D_n cos(n\Omega t - \alpha_n)$ Voir éq. (4.23) **(5.11)**

Pour $p_2(t) = bnsin\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$ On aura $u_2(t) = \frac{b_n}{k} D_n sin(n\Omega t - \alpha_n)$ **(5.12)**

Pour $p_3(t) = a_0$ On aura $u_3(t) = \frac{a_0}{k}$ **(5.8)**

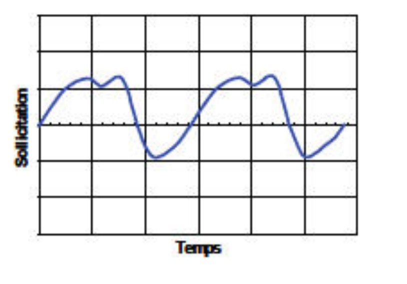
Où $r_n = \frac{n\Omega}{\omega_0} = n\, r_1 = nr$ et $Dn = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2\xi r_n^2\right)^2}}$ $\alpha_n = arctg\left(\frac{2\xi r_n}{1 - r_n^2}\right)$

(5.13)

Ainsi, la réponse permanente totale pour un système amorti soumis à une excitation périodique sera:

$$u(t) = \frac{1}{k}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\left(a_n cos(n\Omega t - \alpha_n) + bnsin(n\Omega t - \alpha_n)\right)\right) \quad (5.14)$$

Réponse d’un SSDDL à une excitation périodique



On peut considérer la réponse totale, au lieu de la réponse permanente, il suffit d’ajouter à chaque cas la réponse transitoire.

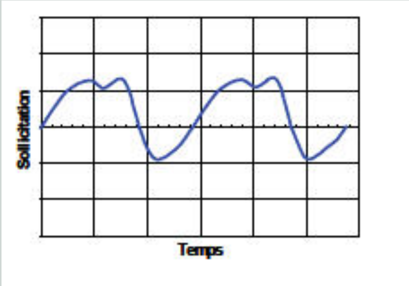
Pour les système non amortis, pour chaque terme, on ajoute (voir éq. 4.3)

$$u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Pour les système amortis, pour chaque terme, on ajoute (voir éq. 4.16)

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t)]$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



Les équations deviennent lourdes, on peut utiliser la représentation exponentielle.

Par transformations d'Euler, on peut écrire

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x \qquad \text{et} \qquad e^{-x} = cos\ x - i\ sin\ x$$

Soit $$cos\ x = \frac{e^{ix} + e^{-x}}{2} \qquad sin\ x = \frac{e^{ix} - e^{-x}}{2i}$$

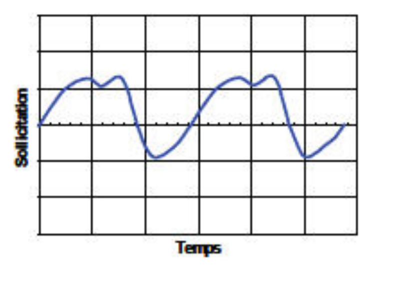
$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{\frac{2i\pi n}{T_p}t} \qquad c_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\ e^{\frac{2i\pi n}{T_p}t}\ dt \qquad (5.5)$$

Remarquons, dans l'éq. 5.5 que C_{+n} est le conjugué complexe de C_{-n}.

D'où, tous les termes imaginaires s'annulent (c'est normal, p(t) est réelle). On peut écrire:

$$p(t) = Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\ e^{in\Omega\, t}\right) \quad (5.15) \qquad A_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\ e^{in\Omega t}\ dt \qquad (5.16)$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



Ainsi, il suffit de trouver la solution à un chargement exponentielle et ne prendre que sa partie réelle.

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0\, e^{i\Omega t} \qquad (5.17)$$

La solution permanente peut prendre la forme

$$u(t) = A\, e^{i\Omega t} = H(\Omega) P_0\, e^{i\Omega t} \qquad (5.18)$$

Avec:

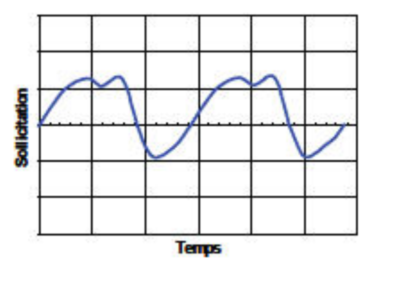
$$A = \frac{P_0}{(k - m\Omega^2) + (ic\Omega)} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1 - r^2) + 2i\xi r} \qquad (5.19)$$

et

$$H(\Omega) = \frac{A}{P_0} = \frac{1}{k}\frac{1}{(1 - r^2) + 2i\xi r} \qquad (5.20)$$

$H(\Omega)$ est appelée : Fonction de réponse en fréquence complexe

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



Ainsi, en considérant la force p(t) en (5.15)

$$p(t) = Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{in\Omega\, t}\right)$$

La solution permanente sera:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_e\left[H(n\Omega)\, A_n e^{in\Omega\, t}\right] \qquad (5.21)$$

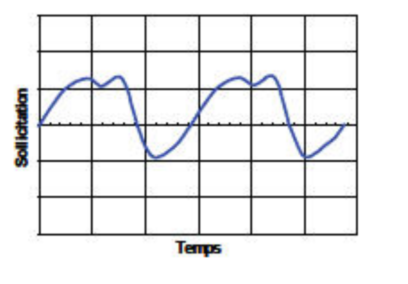
Avec: $$H(n\Omega) = \frac{1}{k}\frac{1}{(1 - n^2r^2) + 2i\xi nr} \qquad (5.22)$$

Si on considère l'autre forme de la force p(t) en (5.5) $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{\frac{2i\pi n}{T_p}t}$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H(n\Omega)\, c_n e^{in\Omega\, t}\right] \qquad (5.23)$$

Avec: $$H(n\Omega) = \frac{1}{k}\frac{1}{(1 - n^2r^2) + 2i\xi nr}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



Conclusion (Procédure)

- **Pour une force d'excitation p(t) donnée.**
- **Calculer les coefficients a_0, an et b_n pour la 1ère forme (5.3) ou bien c_n pour la 2ème forme (5.5).** $a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)dt\ ; a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\cos\frac{2\pi n}{T_p}\ t\ dt; b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}\ t\ dt;$ **ou bien** $c_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\ e^{\frac{2i\pi n}{T_p}t}\ dt$
- **En fonction du type du système (amorti ou non) et de la solution demandée (Totale ou uniquement permanente), calculer les réponses dues à chaque terme de la série. Terme en a_0, en a_n (avec cos) et b_n (avec sin) pour la 1ère forme ou bien terme en c_n (avec complexe) pour la 2ème forme.**
- **Superposer les réponses élémentaires pour obtenir la réponse totale pour la 1ère forme ou bien prendre la partie réelle de la réponse de la 2ème forme.**

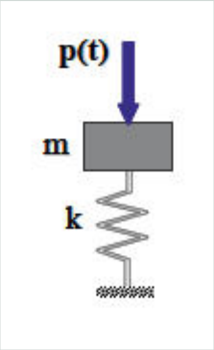
Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique

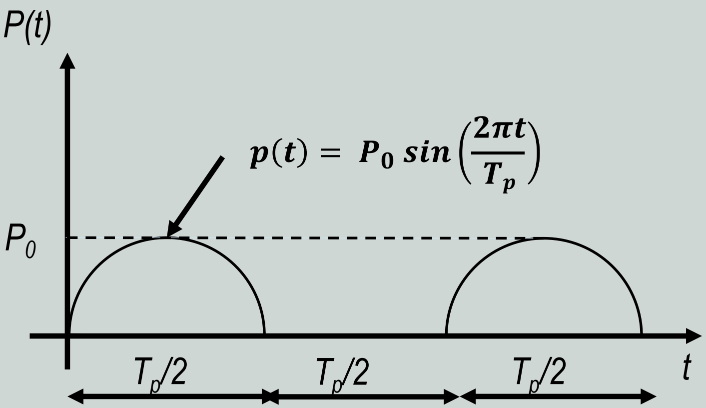
Exemple 1

Considérons système à 1 SDDL soumis à une force périodique p(t) montrée en figure ci contre.

Supposons que le système n'est pas amorti,

i) Calculer la réponse permanente.

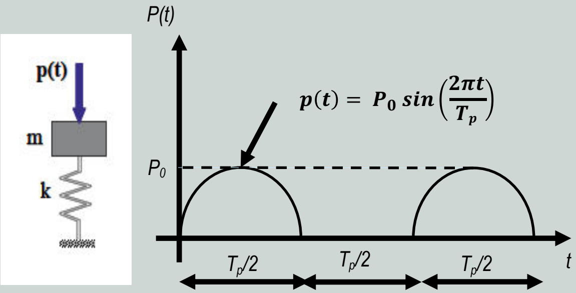




On donne :

$$\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



i) Calcul des coefficients

(Eq. 5.3)

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)dt\ ;$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\cos\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt$$

Dans notre cas:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)dt\ ; \quad a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\cos\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt; \quad b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\sin\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt$$

En calculant les intégrales et en utilisant la condition d'orthogonalité:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nkx)\sin(mkx)\,dx = \begin{cases} 0 \quad si\ n = m \\ 1\ si\ n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nkx)\cos(mkx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nkx)\sin(mkx)\,dx = \begin{cases} 1 \quad si\ n = m \\ 0\ si\ n \neq m \end{cases}$$

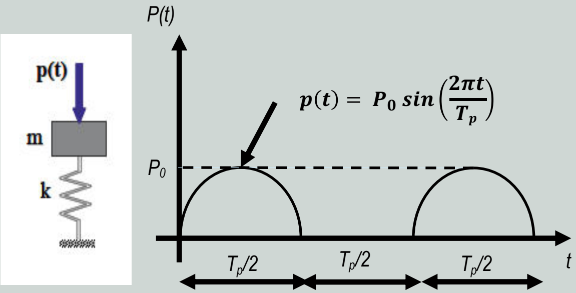
On aura:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)dt = \frac{P_0}{T_p}\left[-\frac{T_p}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{T_p}\right]_0^{T_p/2} = -\frac{P_0}{2\pi}[\cos\pi - 1] = \frac{P_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\cos\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt = \begin{cases} 0 \quad si\ n = impair \\ \frac{P_0}{\pi}\frac{2}{1-n^2}\ si\ n\ pair \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\sin\frac{2\pi n}{T_p}\ t\, dt = \begin{cases} \frac{P_0}{2}\ si\ n = 1 \\ 0 \quad si\ n < 1 \end{cases}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique



Avec

$$a_0 = \frac{P_0}{\pi} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & si\ n = impair \\ \frac{P_0}{\pi}\frac{2}{1-n^2} & si\ n\ pair \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \frac{P_0}{2} & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n < 1 \end{cases}$$

La fonction périodique d'excitation devient (éq. 5.2)

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$$

$$p(t) = \frac{P_0}{\pi} + \frac{P_0}{2} sin\left(\frac{2\pi}{T_p}t\right) + \sum_{n=2,pair}^{\infty} \frac{P_0}{\pi}\frac{2}{1-n^2} cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$$

$$p(t) = \frac{P_0}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2} sin(\Omega t) - \frac{2}{3}cos(2\Omega t) - \frac{2}{15}cos(4\Omega t) - \frac{2}{35}cos(6\Omega t) - \cdots\right]$$

La réponse permanente pour un système non amorti sera (éq. 5.14):

$$u(t) = \frac{1}{k}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-r_n^2}\left(a_n cos(n\Omega t) + bnsin(n\Omega t)\right)\right)$$

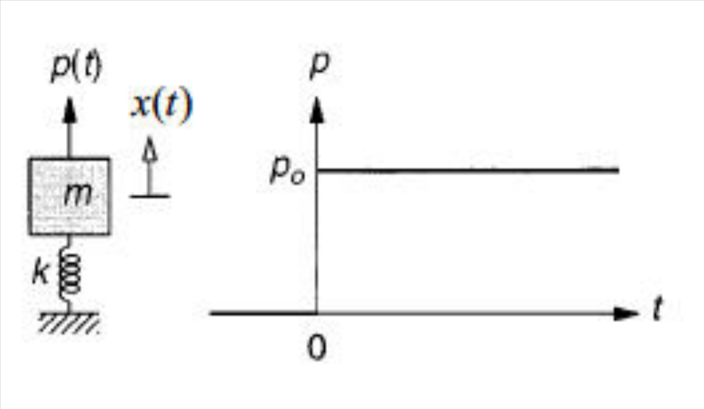
$$r_n = \frac{n\Omega}{\omega_0} = n\frac{T}{T_p} = n\frac{3}{4}$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k\pi}\left(1 + \frac{8\pi}{7}sin(\Omega t) + \frac{8}{15}cos(2\Omega t) + \frac{1}{60}cos(4\Omega t) + \cdots\right)$$

Très convergente

4. Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon

Peut prendre plusieurs forme



i. Charge p(t) constante.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 \ \ pour. \ \ t \geq 0 \\ 0 \ \ \ pour \ \ \ t < 0 \end{cases}$$

a. Système amorti.

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0$$

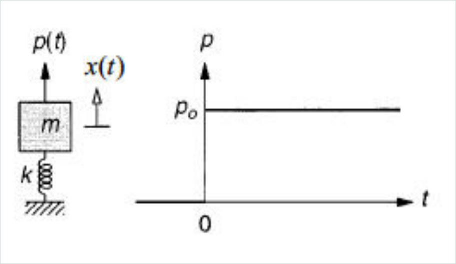
<u>Solution :</u> (Voir Chap 3) : $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[(A\, cos\omega_a t + B\, sin\omega_a t)]$ **et** $u_p(t) = \dfrac{P_0}{k}$

D'où $$u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0 t}[(A\, cos\omega_a t + B\, sin\omega_a t)]$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon

i. Charge p(t) constante. a. Système amorti.



$$u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0 t}\left[(A\,cos\omega_a t + B\,sin\omega_a t)\right]$$

Soit les CI: $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

En remplaçant, on obtiendra:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0 t}\left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a t\right] \quad \textbf{(5.24)}$$

Si le système est au repos: $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = 0$

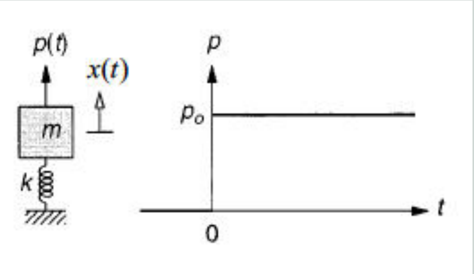
D'où

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - e^{-\xi\omega_0 t}\left(cos\omega_a t + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}sin\omega_a t\right)\right] \quad \textbf{(5.25)}$$

On peut définir le coefficient d'amplification dynamique pour cette charge constante.

$$D = \frac{u_{max}}{U_0} = k.\frac{u_{max}}{P_0}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon



i. Charge p(t) constante.

b. Système non amorti.

$$m\,\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0$$

<u>Solution :</u> (Voir Chap 3) : $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$ **et** $u_p(t) = \frac{P_0}{k}$

D'où $u(t) = \frac{P_0}{k} + [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$

Soit les CI: $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

$$u(t) = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right) cos\omega_0 t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right) sin\omega_0 t\right] \qquad \mathbf{(5.26)}$$

Si le système est au repos: $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = 0$

D'où

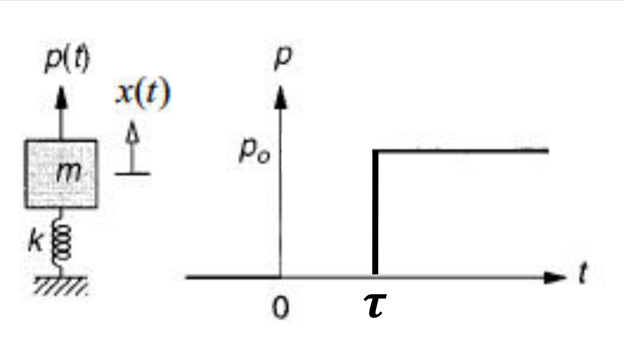
$$u(t) = \frac{P_0}{k}[1 - cos\omega_0 t] \qquad \mathbf{(5.27)}$$

et

$$D = \frac{u_{max}}{U_0} = k.\frac{u_{max}}{P_0} = 2 \qquad \mathbf{(5.28)}$$

ii. Charge p(t) appliquée à t=τ.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 \;\; pour. \;\; t \geq \tau \\ 0 \;\;\; pour \;\;\; t < \tau \end{cases}$$



Le mouvement est similaire à celui du 1er cas, sauf qu'il faut translater le temps de « τ ». Les solutions seront celles des équations (5.24) et (5.26) pour amorti et non amorti. Soit les CI: $u(\tau) = u_\tau$ et $\dot{u}(\tau) = \dot{u}_\tau$

amorti

$$u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(t-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(t-\tau)\right] \quad \textbf{(5.29)}$$

Non amorti

$$u(t) = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_0(t-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_0}\right)sin\omega_0(t-\tau)\right] \quad \textbf{(5.30)}$$

Si le système est au repos: $u(\tau) = 0$ et $\dot{u}(\tau) = 0$

amorti

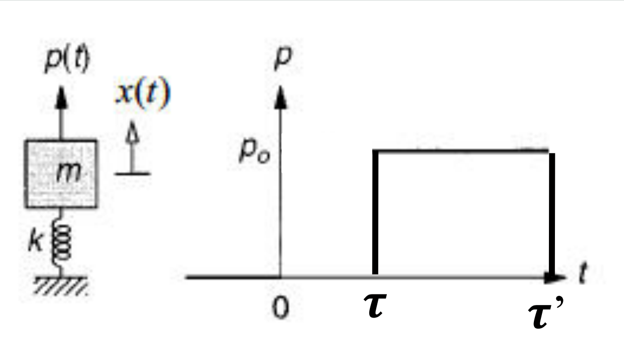
$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left(cos\omega_a(t-\tau) + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}sin\omega_a(t-\tau)\right)\right] \quad \textbf{(5.31)}$$

Non amorti

$$u(t) = \frac{P_0}{k}[1 - cos\omega_0(t-\tau)] \quad \textbf{(5.32)}$$

iii. Charge p(t) appliquée à $t=\tau$ puis s'annule à $t=\tau$ '.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 \; pour.\, \tau \leq t \leq \tau' \\ 0 \quad pour \quad t < \tau \text{ et } t > \tau' \end{cases}$$



Dans ce cas, 02 cas à considérer:

1) $\tau \leq t \leq \tau'$

On serait dans le cas, charge constante appliquée avec un décalage de temps «τ » (Voir éqs. 5.29, 5.30, 5.31 et 5.32)

2) $t > \tau'$

Oscillations libres du au déplacement et vitesse finaux de la phase 1)

CI: $u_2(\tau') = u_1(\tau') = u_{\tau'}$ et $\dot{u}_2(\tau') = \dot{u}_1(\tau') = \dot{u}_{\tau'}$

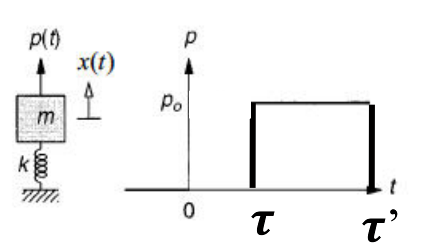
amorti

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau')}[Acos\omega_a(t-\tau') + Bsin\omega_a(t-\tau')] \qquad \textbf{(5.33)}$$

Non amorti

$$u(t) = [Acos\omega_0(t-\tau') + Bsin\omega_0(t-\tau')] \qquad \textbf{(5.34)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon



2) $t > \tau'$

amorti

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau')}[A\cos\omega_a(t-\tau') + B\sin\omega_a(t-\tau')]$$

CI: $u_2(\tau') = u_1(\tau') = u_{\tau'}$ et $\dot{u}_2(\tau') = \dot{u}_1(\tau') = \dot{u}_{\tau'}$

$$\boldsymbol{u(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau')}\left[\left(u_{\tau'}\cos\omega_a(t-\tau') + \frac{\dot{u}_{\tau'} + \xi\omega_0 u_{\tau'}}{\omega_a}\sin\omega_a(t-\tau')\right)\right]} \qquad \textbf{(5.35)}$$

Non amorti

$$u(t) = [A\cos\omega_0(t-\tau') + B\sin\omega_0(t-\tau')]$$

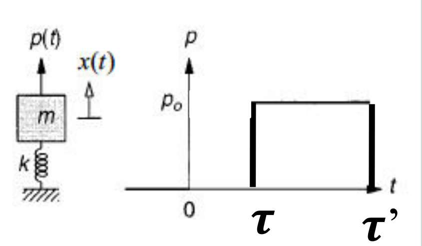
$$\boldsymbol{u(t) = u_{\tau'}\cos(\omega_0(t-\tau')) + \frac{\dot{u}_{\tau'}}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-\tau'))} \qquad \textbf{(5.36)}$$

Avec $u_{\tau'}$ est donnée par (5.29) et (5.30) pout t= τ'. Puis on dérive pour $\dot{u}_{\tau'}$

amorti $$u(\tau') = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0(\tau'-\tau)}\left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)\cos\omega_a(\tau'-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)\right)\sin\omega_a(\tau'-\tau)\right] \qquad \textbf{(5.37)}$$

Non amorti $$u(\tau') = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)\cos\omega_0(\tau'-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_0}\right)\sin\omega_0(\tau'-\tau)\right] \qquad \textbf{(5.38)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon



2) $t > \tau'$

Pour $\dot{u}_{\tau'}$ on dérive d'abord (5.29) et (5.30) puis on pose t= τ'.

amorti

$$u(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0(t-\boldsymbol{\tau})}\left[\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(t-\boldsymbol{\tau}) + \left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(t-\boldsymbol{\tau})\right]$$

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0(t-\boldsymbol{\tau})}\left[\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(t-\boldsymbol{\tau}) + \left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(t-\boldsymbol{\tau})\right]$$
$$+ e^{-\xi\omega_0(t-\boldsymbol{\tau})}\left[-\omega_a\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)sin\omega_a(t-\boldsymbol{\tau}) + \omega_a\left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)\right)cosn\omega_a(t-\boldsymbol{\tau})\right] \quad \textbf{(5.39)}$$

$$\dot{u}(\boldsymbol{\tau}') = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})}\left[\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}) + \left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})\right]$$
$$+ e^{-\xi\omega_0(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})}\left[-\omega_a\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)sin\omega_a(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}) + \omega_a\left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)\right)cosn\omega_a(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})\right] \quad \textbf{(5.40)}$$

Non amorti

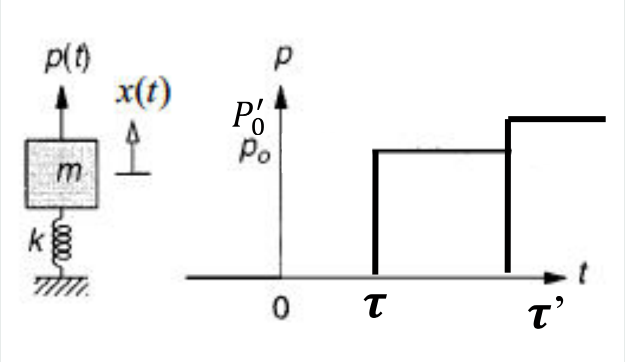
$$\dot{u}(t) = \left[-\omega_0\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)sin\omega_0(t-\boldsymbol{\tau}) + \omega_0\left(\frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{\omega_0}\right)cos\omega_0(t-\boldsymbol{\tau})\right] \quad \textbf{(5.41)}$$

$$\dot{u}(\boldsymbol{\tau}') = \left[-\omega_0\left(u_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{P_0}{k}\right)sin\omega_0(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}) + \dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}cos\omega_0(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau})\right] \quad \textbf{(5.42)}$$

Rem: Si le système est au repos: $u_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ *et* $\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}} = 0$

iv. Charge p(t) constante appliquée sur 02 intervalles.

$$p(t) = \begin{cases} P_0 \ pour.\tau \leq t \leq \tau' \\ P'_0 \ \ pour \quad t > \tau' \end{cases}$$



Dans ce cas, 02 cas à considérer:

1) $\tau \leq t \leq \tau'$

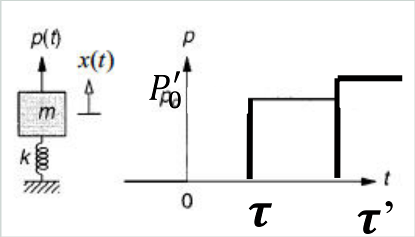
On serait dans le cas, charge constante « P_0 » appliquée avec un décalage de temps «τ » (Voir éqs. 5.29, 5.30, 5.31 et 5.32)

2) $t > \tau'$

On serait toujours dans le cas, charge constante « P'_0 »appliquée avec un décalage de temps « τ' » (Voir éqs. 5.29, 5.30, 5.31 et 5.32)

Mais avec CI: $u_2(\tau') = u_1(\tau') = u_{\tau'}$ et $\dot{u}_2(\tau') = \dot{u}_1(\tau') = \dot{u}_{\tau'}$

Réponse d'un SSDDL à une excitation en échelon



iv. Charge p(t) constante appliquée sur 02 intervalles.

1) $\tau \leq t \leq \tau'$

amorti

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(t-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(t-\tau)\right] \quad (5.43)$$

Non amorti

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_\tau - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_0(t-\tau) + \left(\frac{\dot{u}_\tau}{\omega_0}\right)sin\omega_0(t-\tau)\right] \quad (5.44)$$

2) $t > \tau'$

amorti

$$u_2(t) = \frac{P_0}{k} + e^{-\xi\omega_0(t-\tau')}\left[\left(u_{\tau'} - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_a(t-\tau') + \left(\frac{\dot{u}_{\tau'}}{\omega_a} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_a}\left(u_{\tau'} - \frac{P_0}{k}\right)\right)sin\omega_a(t-\tau')\right] \quad (5.45)$$

Non amorti

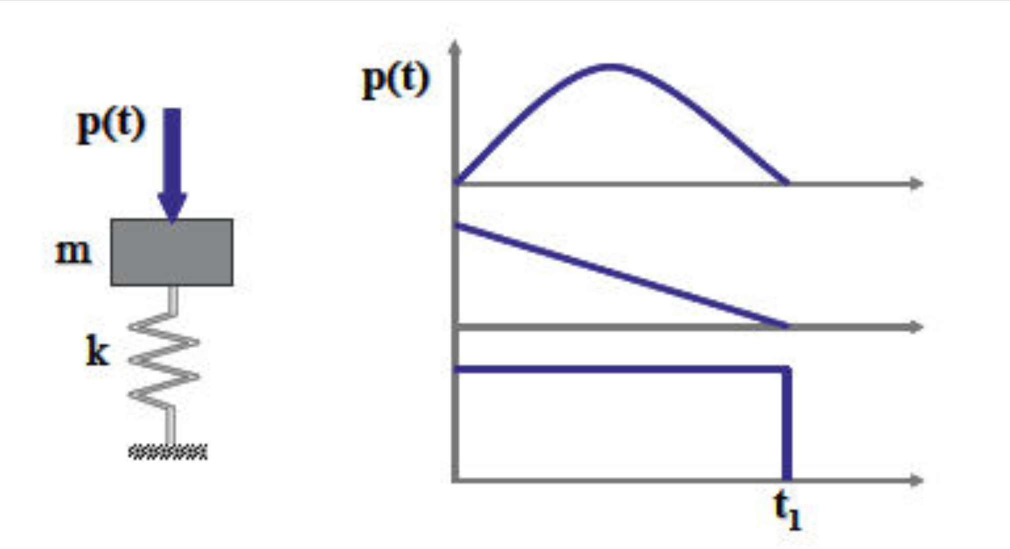
$$u_2(t) = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_{\tau'} - \frac{P_0}{k}\right)cos\omega_0(t-\tau') + \left(\frac{\dot{u}_{\tau'}}{\omega_0}\right)sin\omega_0(t-\tau')\right] \quad (5.46)$$

Mais avec CI: $u_2(\tau') = u_1(\tau') = u_{\tau'}$ et $\dot{u}_2(\tau') = \dot{u}_1(\tau') = \dot{u}_{\tau'}$

5. Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

- **Elle ne se répète pas dans le temps.**
- **Elle est de très courte durée.**
- **L'amortissement n'aura pas le temps de se développer durant l'excitation.**
- **Il y a toujours 02 phases: La 1ère le système est forcé par une excitation très courte et la 2ème le système est en oscillations libres due au déplacement et la vitesse finaux de la 1ère phase.**
- **Elle peut prendre des formes variées, sinusoïdale, triangulaire, rectangulaire…**

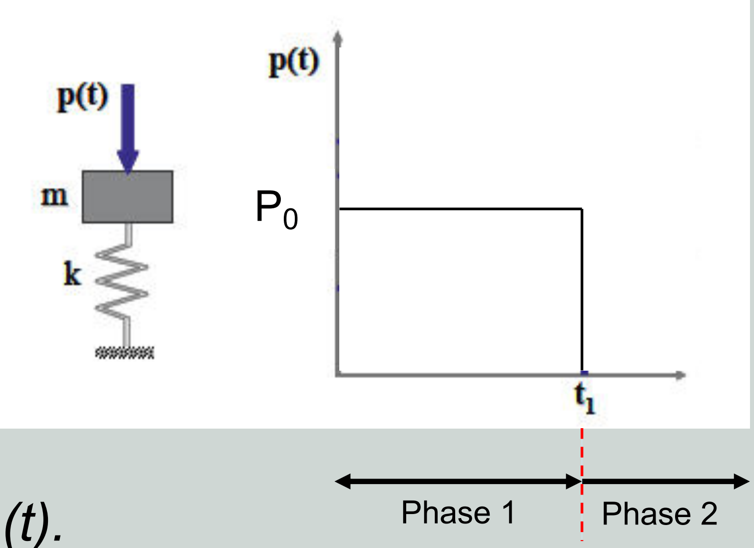
Ex. Choc/Impact du à une collision, une explosion, joints du pont, parcs d'attraction...



Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

i. Impulsion rectangulaire

Phase 1: t ≤ t_1



Système soumis à une force constante avec amortissement négligé (impulsion)

D'où: $$m\ddot{u}_1(t) + ku_1(t) = P_0$$

<u>Solution :</u> (Voir Chap 3) : $u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $$u_c(t) = [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)] \qquad u_p(t) = \frac{P_0}{k}$$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k} + [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$$

Soit les CI: $u_1(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k} + \left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right) cos\omega_0 t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right) sin\omega_0 t\right] \qquad \textbf{(5.47)}$$

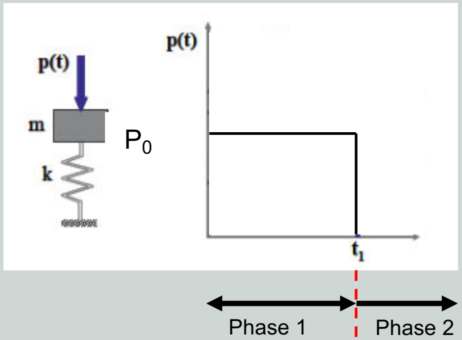
Si le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}[1 - cos\omega_0 t] \qquad \textbf{(5.48)}$$

et $$D = \frac{u_{max}}{U_0} = k.\frac{u_{max}}{P_0} = 2$$

i. Impulsion rectangulaire

Phase 2: t $\geq$ t$_1$



Système en oscillations libres dues au déplacement et vitesse finaux de la phase 1

D'où: $$m\,\ddot{u}_2(t) + k u_2(t) = 0$$

Avec CI: $u_2(t_1) = u_1(t_1) = u_{t1}$ *et.* $\dot{u}_2(t_1) = \dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_{t1}$

Si on suppose que le système est au repos: $u_1(0) = 0$ *et* $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\, cos\omega_0(t - t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t - t_1)\right] \qquad \textbf{(5.49)}$$

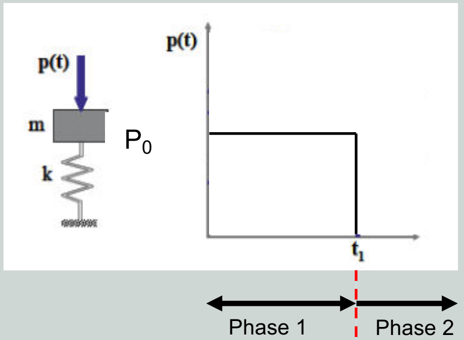
Où. u_{t1} **et** $\dot{u}_{t1}$ **sont obtenus en utilisant l'éq. 5.48. pout « t=t$_1$ »**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}[1 - cos\omega_0 t] \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\omega_0\, sin\omega_0 t$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}[1 - cos\omega_0 t_1] \quad \textbf{et} \quad \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\omega_0\, sin\omega_0 t_1 \qquad \textbf{(5.50)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

i. Impulsion rectangulaire



$$u_2(t) = \left[u_{t1} \cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)\sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad (5.49)$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}[1-\cos\omega_0 t_1] \qquad \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t_1 \quad (5.50)$$

En remplaçant (5.50) dans (5.49)

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}[1-\cos\omega_0 t_1]\cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{P_0}{k}\sin\omega_0 t_1\right)\sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad (5.51)$$

La réponse maximale en phase 2, sera:

$$u_{2max} = \sqrt{\left(\frac{P_0}{k}\sin\omega_0 t_1\right)^2 + \left(\frac{P_0}{k}[1-\cos\omega_0 t_1]\right)^2} = \mathbf{2.\frac{P_0}{k}\sin(\frac{\pi t_1}{T})}$$

Sachant que : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

En phase 1, la réponse maximale sera (pour un système au repos) (5.48):

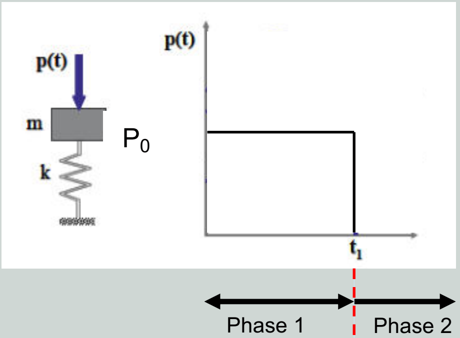
$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}[1-\cos\omega_0 t]$$

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\left[1-\cos\frac{2\pi t_1}{T}\right] = 2.\frac{P_0}{k}\sin^2(\frac{\pi t_1}{T}) \qquad \textbf{pour} \qquad \frac{t_1}{T} \leq 0.5$$

$$u_{1max} = 2.\frac{P_0}{k} \qquad \textbf{pour} \qquad \frac{t_1}{T} \geq 0.5$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

i. Impulsion rectangulaire



Ainsi, si

$\frac{t_1}{T} \geq 0.5$ **La réponse maximale est en phase 1**

$$u_{1max} = 2.\frac{P_0}{k}$$

$\frac{t_1}{T} \leq 0.5$ **La réponse maximale est en phase 2**

$$u_{2max} = 2.\frac{P_0}{k}\sin\left(\frac{\pi t_1}{T}\right)$$

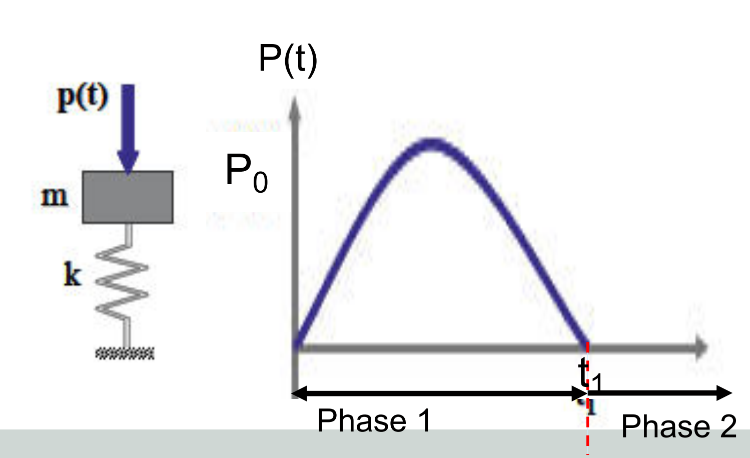
Généralement, la réponse maximale est atteinte très rapidement et les forces d'amortissement n'ont pas le temps pour absorber une énergie significative.

On remarque aussi que

$$\boxed{D = \frac{u_{max}}{u_{stat}} = f\left(\frac{t_1}{T}\right)} \qquad \textbf{(5.52)}$$

ii. Impulsion sinusoidale

Phase 1: t ≤ t_1



Système soumis à une force harmonique de type sinus (impulsion)

D'où: $m\ddot{u}_1(t) + ku_1(t) = P_0 sin\Omega t$

<u>Solution :</u> (Voir Chap 3) : $u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$ $\quad u_p(t) = \dfrac{P_0}{k}\dfrac{1}{1-r^2}sin(\Omega t) = \dfrac{P_0}{k}Dsin(\Omega t)$

D'où $u_1(t) = \dfrac{P_0}{k}Dsin(\Omega t) + [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$

Soit les CI: $u_1(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

$$u_1(t) = (u_0)\,cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - r\frac{P_0}{k}D\right) sin\omega_0 t + \frac{P_0}{k}Dsin\Omega t \qquad \textbf{(5.53)}$$

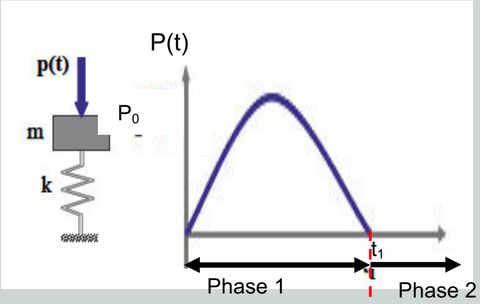
Si le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

D'où

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t - r sin\omega_0 t) \qquad \textbf{(5.54)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

ii. Impulsion sinusoidale



Réponse maximale en phase 1

Prenons le cas simple où le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t - r\sin\omega_0 t) \qquad \textbf{(5.54)}$$

Pour obtenir la max. on annule la dérivée % temps

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\Omega\cos\Omega t - r\omega_0\cos\omega_0 t) = 0$$

Soit $\cos\Omega t = \cos\omega_0 t$ **D'où** $\Omega t = 2\pi n \pm \omega_0 t$ **(5.55)**

Pour $t \leq t_1$ **or** $t_1 = T_p/2 =$ **d'où** $\boldsymbol{\Omega t \leq \pi}$

En considérant le 1^er terme de l'équation (5.55)

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0} \qquad \textbf{(5.56)}$$

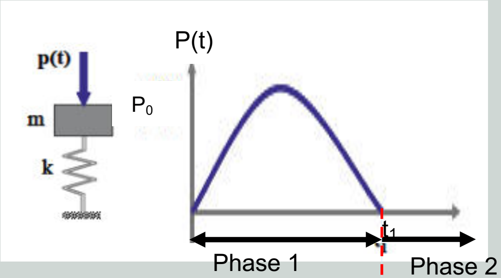
où $t_{max} \leq t_1$ **i.e** $r < 1$

En remplaçant (5.56) dans (5.54), on aura:

pour $r < 1$

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max}) \qquad \textbf{(5.57)}$$

ii. Impulsion sinusoidale



Phase 2: $t \geq t_1$

Système en oscillations libres dues au déplacement et vitesse finaux de la phase 1

D'où: $$m\ddot{u}_2(t) + ku_2(t) = 0$$

Avec CI: $u_2(t_1) = u_1(t_1) = u_{t1}$ *et.* $\dot{u}_2(t_1) = \dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_{t1}$

Si on suppose que le système est au repos: $u_1(0) = 0$ *et* $\dot{u}_1(0) = 0$

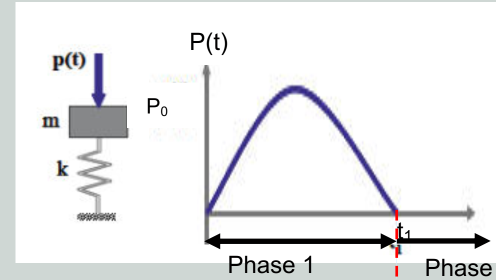
$$u_2(t) = \left[u_{t1}\,cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)sin\omega_0(t-t_1)\right] \qquad \textbf{(5.58)}$$

Où. u_{t1} **et** $\dot{u}_{t1}$ **sont obtenus en utilisant l'éq. 5.54. pout « t=t_1 »**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t - r sin\omega_0 t) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1-r^2}(cos\Omega t - cos\omega_0 t)$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) \quad \textbf{et} \quad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1-r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) \qquad \textbf{(5.59)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive



ii. Impulsion sinusoidale

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\, cos\omega_0(t - t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t - t_1)\right] \quad \textbf{(5.58)}$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1 - r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) \quad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1 - r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) \quad \textbf{(5.59)}$$

En remplaçant (5.59) dans (5.58)

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\frac{1}{1 - r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) cos\omega_0(t - t_1) + \frac{P_0}{k}\frac{r}{1 - r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) sin\omega_0(t - t_1)\right] \quad \textbf{(5.60)}$$

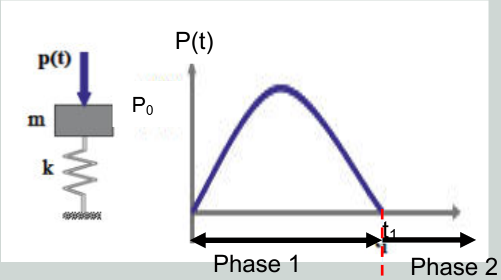
La réponse maximale en phase 2, sera:

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2} = \frac{P_0}{k}\frac{r}{1 - r^2}\sqrt{\left[2 + 2cos\frac{\pi}{r}\right]} \quad \textbf{pour} \quad r > 1 \quad \textbf{(5.61)}$$

$$D = \frac{u_{2max}}{u_{stat}} = \frac{2r}{1 - r^2} cos\frac{\pi}{2r} \quad \textbf{(5.62)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

ii. Impulsion sinusoidale



Ainsi, en résumé si

$r \leq 1$ **La réponse maximale est en phase 1**

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega tmax - rsin\omega_0 t_{max})$$ **avec** $$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0}$$

$r \geq 1$ **La réponse maximale est en phase 2**

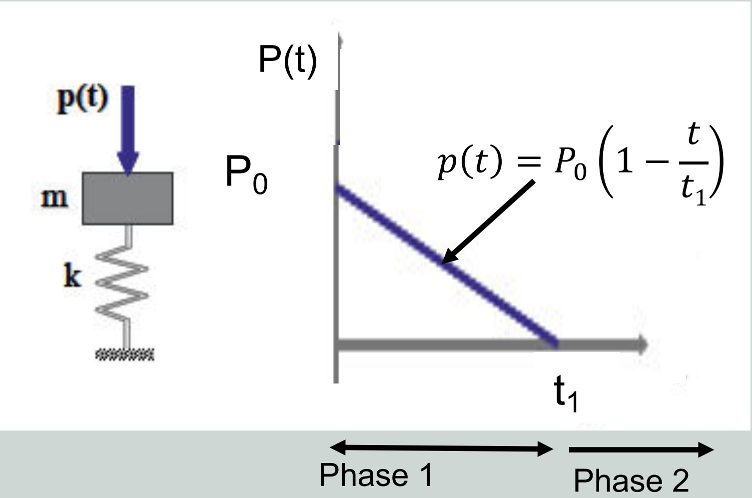
$$u_{2max} = \frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}cos\frac{\pi}{2r}$$

De même, on peut remarquer que

$$\boxed{D = \frac{\boldsymbol{u_{max}}}{\boldsymbol{u_{stat}}} = \boldsymbol{f}(\frac{\boldsymbol{t_1}}{\boldsymbol{T}})}$$

iii. Impulsion triangulaire

Phase 1: $t \leq t_1$



Système soumis à une force linéaire decroissante (impulsion)

D'où: $$m\,\ddot{u}_1(t) + ku_1(t) = P_0\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$$

Solution : (Voir Chap 3) : $u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$ $\qquad u_p(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right)$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right) + [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$$

Soit les CI: $u_1(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

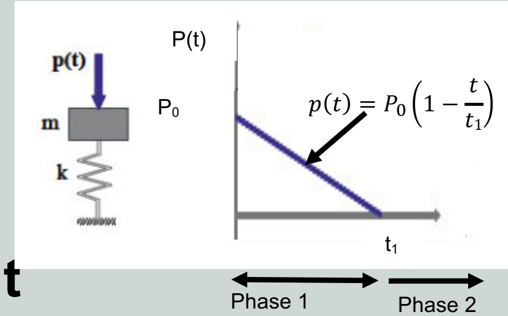
$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_1}\right) + \left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k}\right) cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{u}_0 + \frac{P_0}{kt_1}\right) sin\omega_0 t\right] \qquad \textbf{(5.63)}$$

Si le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t\right) \qquad \textbf{(5.64)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

iii. Impulsion triangulaire



Phase 2: t ≥ t_1

Système en oscillations libres dues au déplacement et vitesse finaux de la phase 1

D'où: $$m\,\ddot{u}_2(t) + k u_2(t) = 0$$

Avec CI: $u_2(t_1) = u_1(t_1) = u_{t1}$ *et.* $\dot{u}_2(t_1) = \dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_{t1}$

Si on suppose que le système est au repos: $u_1(0) = 0$ *et* $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)\sin\omega_0(t-t_1)\right] \qquad \textbf{(5.64)}$$

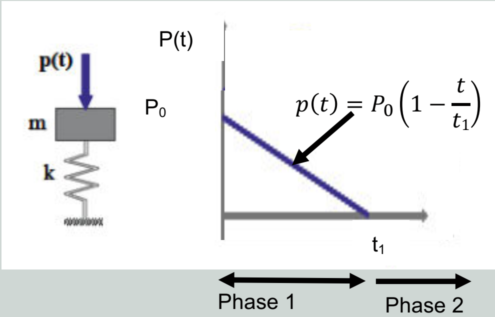
Où. u_{t1} **et** $\dot{u}_{t1}$ **sont obtenus en utilisant l'éq. 5.64. pout « t=t_1 »**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1} - \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t\right) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0\sin\omega_0 t + \frac{1}{t_1}\cos\omega_0 t\right)$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-\cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1}\sin\omega_0 t_1\right) \text{ et } \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0\sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1}\cos\omega_0 t_1\right) \qquad \textbf{(5.65)}$$

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive

iii. Impulsion triangulaire



$$u_2(t) = \left[u_{t1}\, cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad \textbf{(5.64)}$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) \quad \textbf{(5.65)}$$

En remplaçant (5.65) dans (5.64)

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\left(-cos\omega_0 t_1 + \frac{1}{\omega_0 t_1} sin\omega_0 t_1\right) cos\omega_0(t-t_1) + \frac{P_0}{\omega_0 k}\left(-\frac{1}{t_1} + \omega_0 sin\omega_0 t_1 + \frac{1}{t_1} cos\omega_0 t_1\right) sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

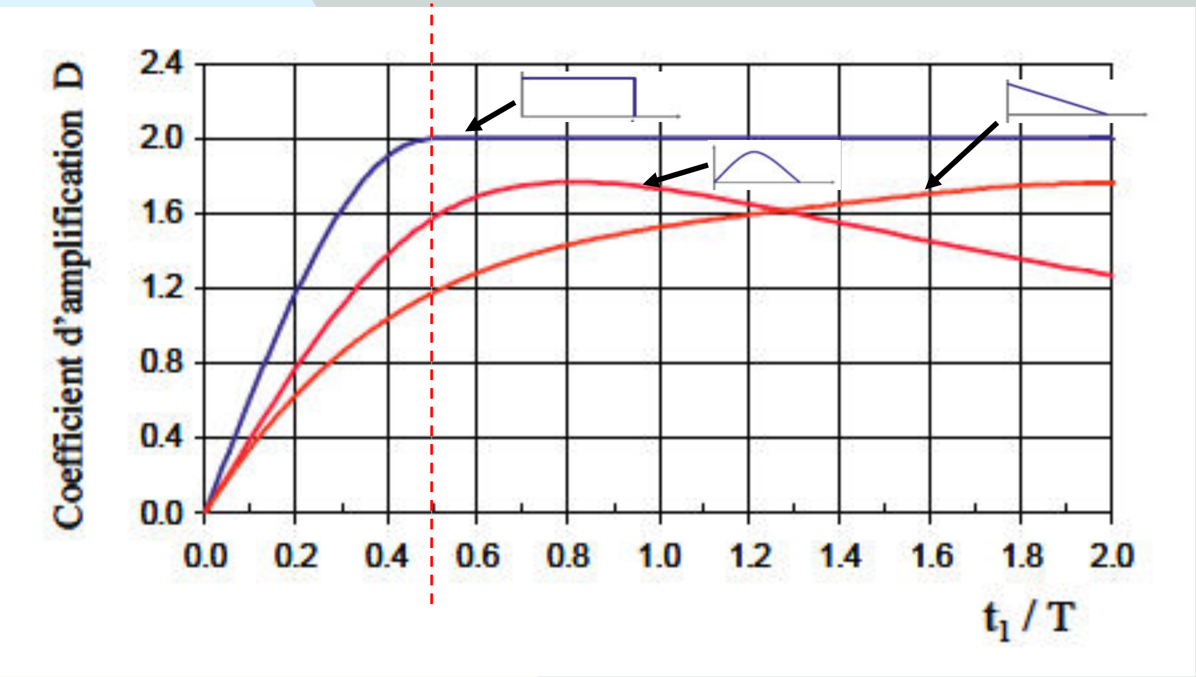
(5.66)

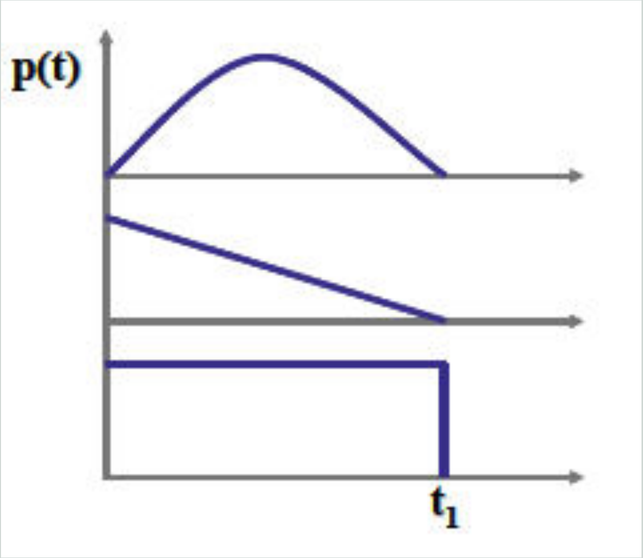
La réponse maximale en phase 2, sera:

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2} \quad \textbf{pour} \quad \frac{t1}{T} < 0.4 \quad \textbf{(5.67)}$$

$$D = \frac{u_{2max}}{u_{stat}} = f\left(\frac{t1}{T}\right)$$

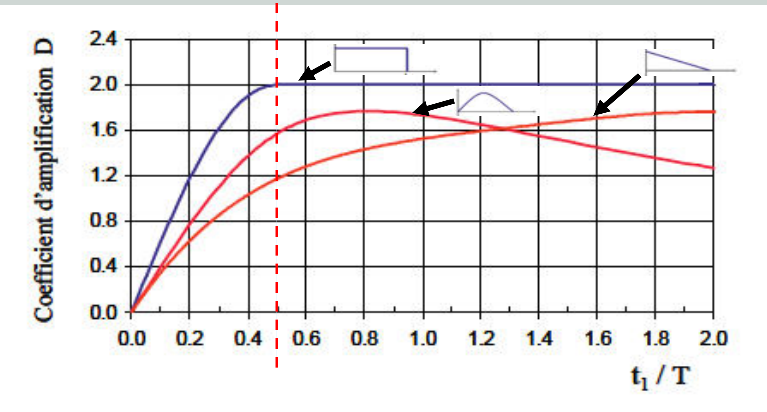
Ainsi, en résumé on peut tracer pour les 03 types d'impulsion, la courbe $D = \frac{u_{max}}{u_{stat}} = f(\frac{t_1}{T})$





Spectres de réponse ou spectre de choc

Réponse d'un SSDDL à une excitation impulsive



On remarque que qlq soit le type d'impulsion, la valeur maximale de D=2.

D'où, dans les analyses d'impact, on prend souvent une

$$f_{stat\ équivalente} = 2\ f_{appliquée}$$

Aussi, pour

$\frac{t1}{T} > 0.5$ **La réponse maximale en phase 1 (Pendant le choc)**

$\frac{t1}{T} > 1$ **D_{max} dépend de la variation temporelle de l'impulsion.**
En comparant l'impulsion sinusoidale et rectangulaire, une montée graduelle de la force produit une amplification moindre qu'une montée soudaine.

$\frac{t1}{T} < 0.5$ **La réponse maximale en phase 2 (Vibration libre) et dépend de la valeur de l'impulsion totale** $I = \int_0^{t_1} p(t)dt$

Merci. **Fin du chapitre 5**

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 6

Vibrations forcées des systèmes à 01 DDL:

Excitation Quelconque

COURS 6 Dimanche 30.10.2022