Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 1: Systèmes à 01 seul DDL.

Chap. 2

Formulation des équations du mouvement d'un systèmes à 01 seul DDL.

COURS 1 **Dimanche 02.10.2022**

1. Introduction

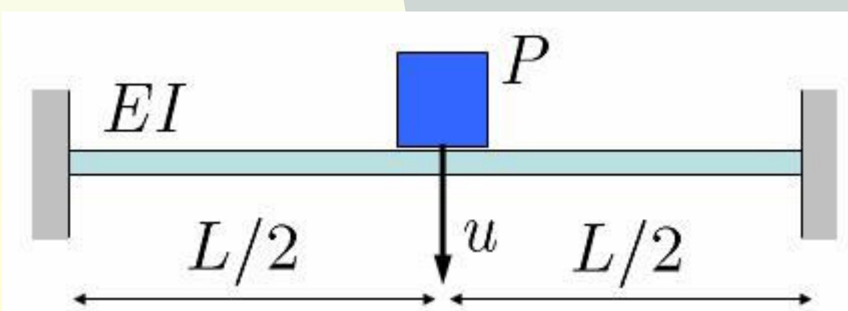
Système à 01 DDL: Le mouvement est complétement décrit par une seule variable (généralement déplacement).

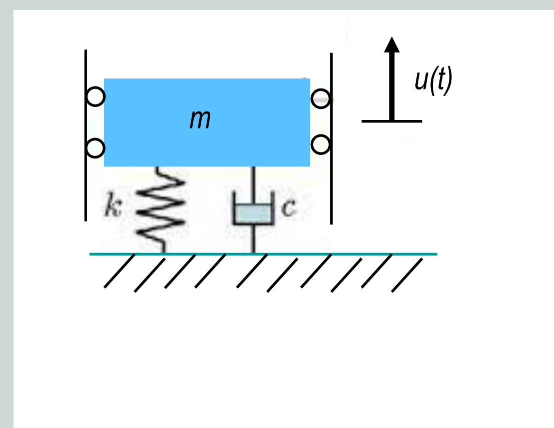
Une seule équation différentielle.

Exemples

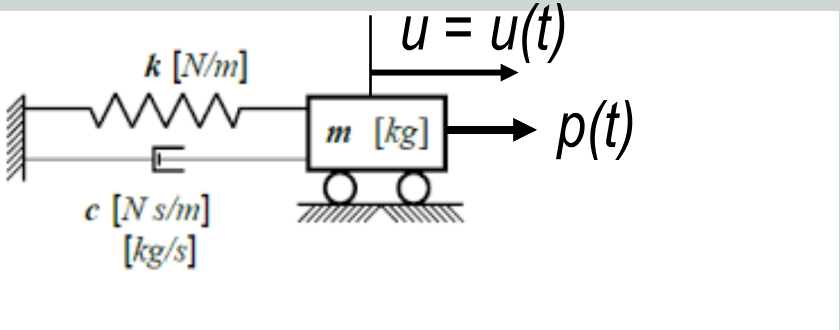
Poutre simple supportant une charge lourde (citerne, générateur,…) au milieu.

Mouvement décrit uniquement par le déplacement vertical de la masse

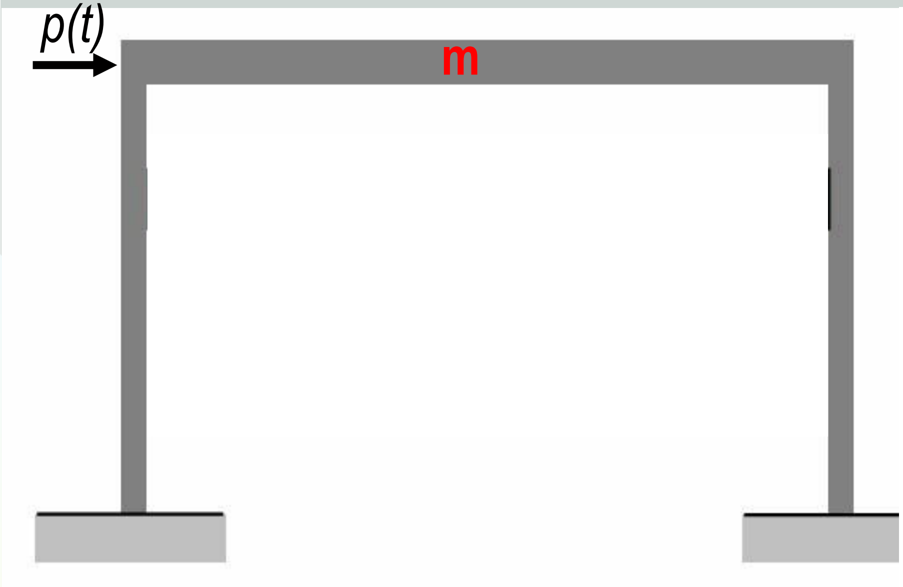


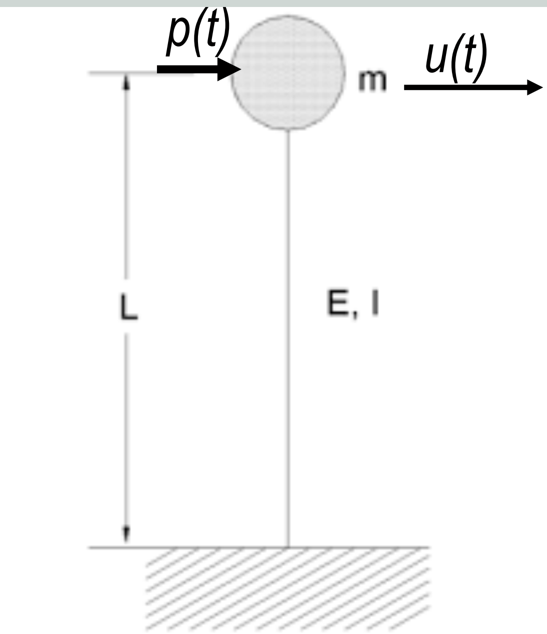


Introduction



Exemples



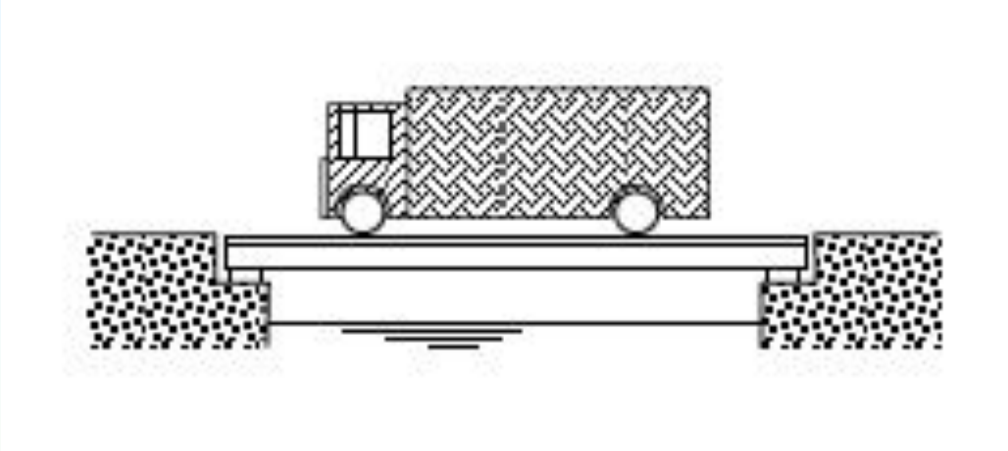


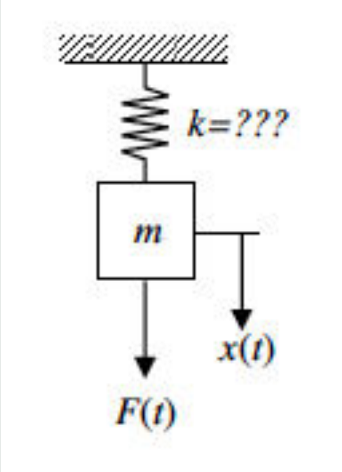
Poutre lourde très rigide et poteaux flexibles

Poids des poteaux négligé

Mouvement décrit uniquement par le déplacement horizontal de la masse

Exemples

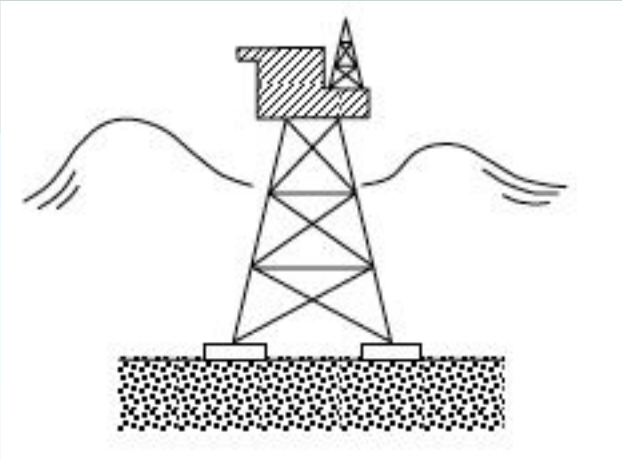


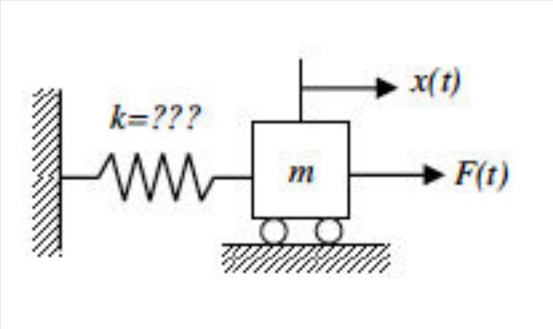


- Pont soumis au passage de véhicules lourds
- Le déplacement vertical (flèche)
- La masse est celle du véhicule
- La rigidité est celle équivalente du pont

Introduction

Exemples





- Plate forme offshore.
- Chargement dynamique : Courant marin
- Partie supérieure supposée rigide
- Mouvement horizontal
- Masse de la partie supérieure (Treillis négligé)
- Rigidité égale à celle du treillis

Introduction

Les composantes d’un système dynamique de base:

1. **La masse**
2. **Propriétés élastiques (rigidité ou flexibilité)**
3. **Mécanisme de perte d’énergie ou amortissement**
4. **Fonction d’excitation**

Formulation de l'équation de mouvement suivant 03 méthodes différentes:

1. **Le principe de D'Alembert**
2. **Le principe de Hamilton**
3. **Le principe des déplacements virtuels**

2. Formulation par le principe de D'Alembert

« Les forces extérieures d'une structure sont égales aux forces directement appliquées à la masse diminuées des forces d'inertie » (**D'Alembert**).

On aura:

- La force due à la présence de la masse (f_i) .
- La force due à la présence de l'amortissement (f_a).
- La force due à la rigidité (f_k).
- Les forces extérieures p(t).

Ainsi, on aura:

$$f_a + f_k = p(t) - f_i \qquad (2.1)$$

Formulation par le principe de D'Alembert

On peut aussi utiliser la 2ème loi de Newton dite loi fondamentale de la dynamique.

« Les forces appliquées sur une structure (torseur des efforts) sont égales à la variation de la quantité de mouvement du système.

On aura:

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{du}{dt}\right) = m\frac{d^2u}{dt^2} = m\,\ddot{u}(t) \quad \textbf{(2.2)}$$

Avec:

u : déplacement; $\frac{du}{dt}$ **= vitesse et** $\frac{d^2u}{dt^2}$ **= accélération**

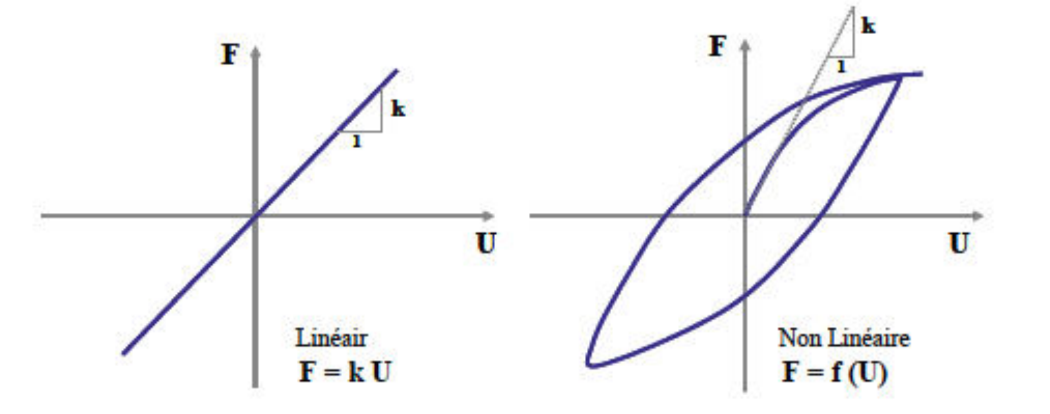
i. La force due à la rigidité (f_k).

Elle peut ne dépendre que du déplacement u(t).

Si à tout instant, il y a proportionnalité entre la force et le déplacement, le comportement est élastique linéaire (cas des ressorts). On aura alors:

$$f_k = k.u \qquad (2.3)$$

Rem: Dans certains cas, il peut ne pas y avoir une proportionnalité entre déplacement et effort (Comportement



ii. La force due à l'amortissement(f_a).

Généralement, une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort est dissipée au cours du temps, c'est l'amortissement.

Différents mécanismes:

- **Amortisseur physique (amortisseur hydraulique)**
- **Effets thermiques liés au chargement répété du matériau, de frottements internes (glissements entre grains), de déformation d'origine plastique…**

Amortissement généralement complexe et ne peut pas être calculé à partir des propriétés physiques de la structure.

ii. La force due à l'amortissement(f_a).

En génie civil, la dissipation peut avoir plusieurs origines:

- **Fissuration du béton**
- **Plastification des aciers**
- **Glissement relatifs entre structure porteuse et éléments secondaires (cloisons, baies vitrées…)…**

En pratique, par simplification, on utilise le modèle visqueux linéaire, où :

$$f_a = c.\dot{u} \qquad (2.4)$$

c : Coefficient d'amortissement (N.s/m) et $\dot{u}$: la vitesse

iii. La force due à la masse (f_i).

Dite force de D'Alembert.

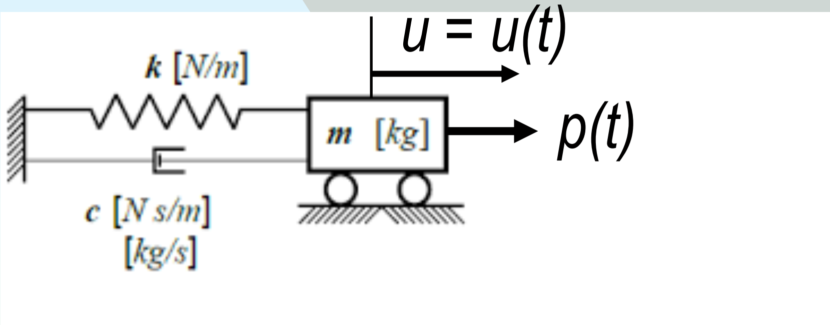
Ecartée de sa position d'équilibre, la masse est soumise à une force d'inertie.

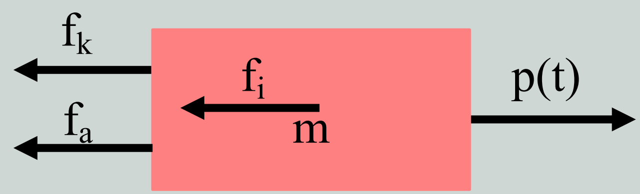
A tout instant, il y a proportionnalité entre la force et l'accélération. On aura alors:

$$f_i = m\ddot{u}(t) \qquad (2.5)$$

Formulation par le principe de D'Alembert

En récapitulatif;





Par équilibre, on aura:

$$f_i + f_a + f_k = p(t)$$

$$m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \qquad \textbf{(2.6)}$$

Equation générale du mouvement d'un système à 01 seul DDL.

3. Formulation par le principe de Hamilton

« La somme de la variation de l'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est nulle » (Hamilton).

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,(T - V)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\,W\,dt = 0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

Avec:

- δ **: variation**
- T **: Énergie cinétique**
- V **: Énergie potentielle**
- W **: Travail des forces non conservatives.**

L’énergie cinétique due à la force d’inertie

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{u}^2 \qquad (2.8)$$

L’énergie potentielle due à la force élastique

$$V = \frac{1}{2}\, ku^2 \qquad (2.9)$$

Le travail du à la force extérieure et à la force d’amortissement (forces non conservatives)

$$w = p(t) - c\dot{u} \qquad (2.10)$$

D’où, les variations:

$$\delta T = m.\dot{u}.\delta\dot{u};\ \delta V = k.u.\delta u\ ;\delta w = p(t)\delta u - c\dot{u}.\delta u \qquad (2.11)$$

En remplaçant (2.11) dans l'équation de Hamilton (2.7), on aura:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\, W dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m.\dot{u}.\delta\dot{u} - k.u.\delta u + p(t)\delta u - c\dot{u}.\delta u]\, dt = 0 \qquad \textbf{(2.12)}$$

En intégrant par parties le 1^er^ terme, on aura:

$$\int_{t_1}^{t_2} m.\dot{u}.\delta\dot{u}\, dt = m\dot{u}\delta u\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\,\delta u dt \qquad \textbf{(2.13)}$$

Principe de Hamilton, la variation « δu » s'annule aux limites, i.e 1er terme de (2.13) s'annule.

En remplaçant (2.13), sans le 1er terme dans l'équation de Hamilton (2.12), on aura:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{u}\delta u - k.u.\delta u + p(t)\delta u - c\dot{u}.\delta u]\, dt = 0 \qquad (2.14)$$

Soit:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{u} - k.u + p(t) - c\dot{u}]\delta u dt = 0 \qquad (2.15)$$

« δu » est différent de zéro. L'équation (2.15) est satisfaite pour:

$$-m\ddot{u} - k.u + p(t) - c\dot{u} = 0$$

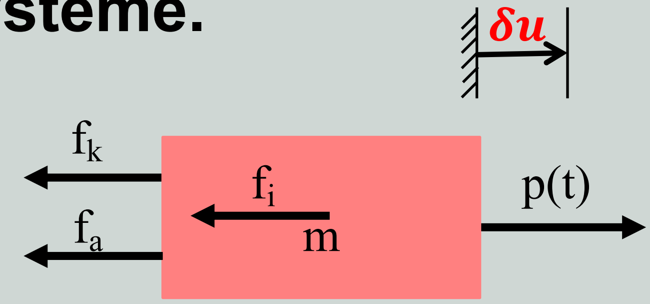
Ou bien : $$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

4. Formulation par le principe des travaux virtuels

Méthode intéressante lorsque la masse et la rigidité sont distribuées dans le tout système (système continu).

Valable aussi pour les corps rigides.

On applique un déplacement virtuel « δu » à la masse, compatible avec les contraintes du système.



D'où, chaque force produit un travail.

Le travail total du système est égale à zéro

$$f_i\,\delta u + f_a\,\delta u + f_k\,\delta u = p(t)\,\delta u$$

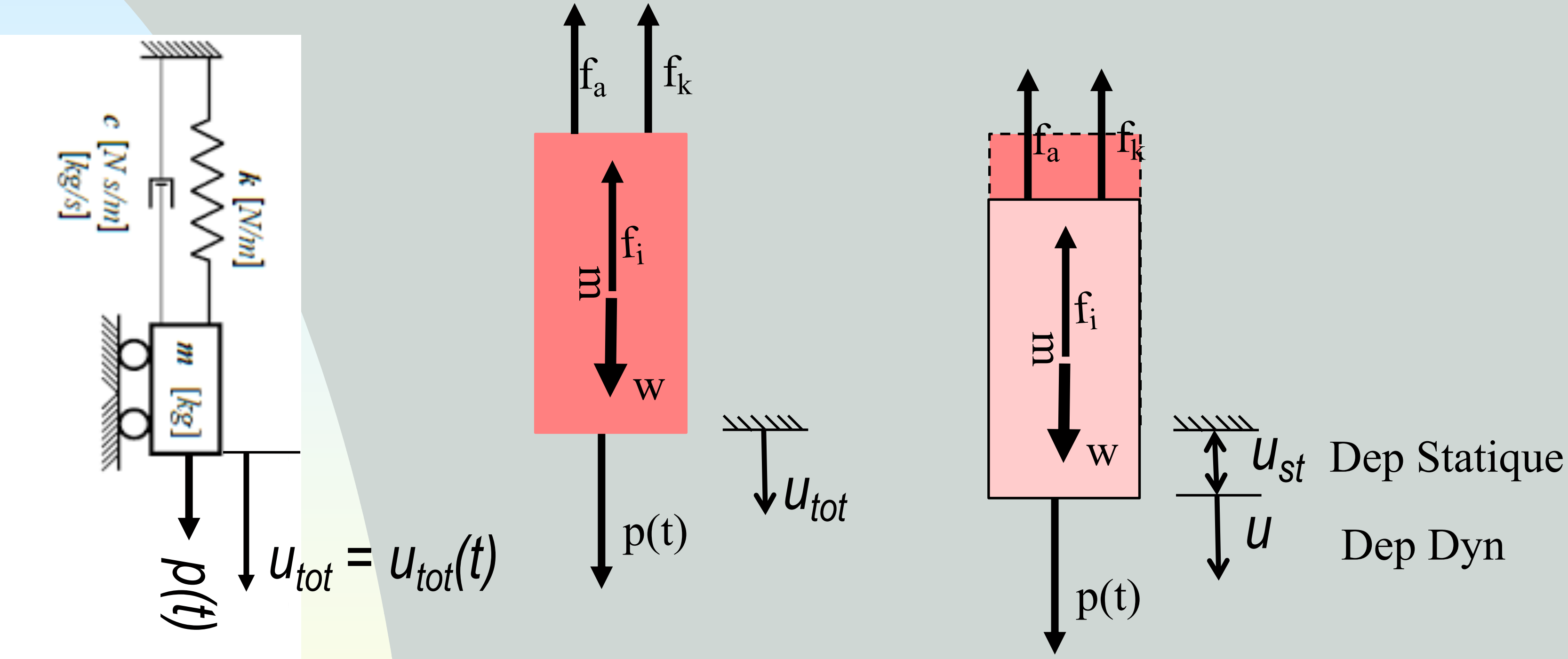
$$(f_i + f_a + f_k)\,\delta u = p(t)\,\delta u$$

$$\big(m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t)\big)\delta u = p(t)\delta u$$

D'où, $\boxed{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)}$

5. Influence des forces statiques (de pesanteur)

Système en tenant compte du poids propre « w »



Déplacement total

$$u_{tot}(t) = u_{st} + u(\mathrm{t}) \qquad (2.16)$$

Influence des forces statiques (de pesanteur)

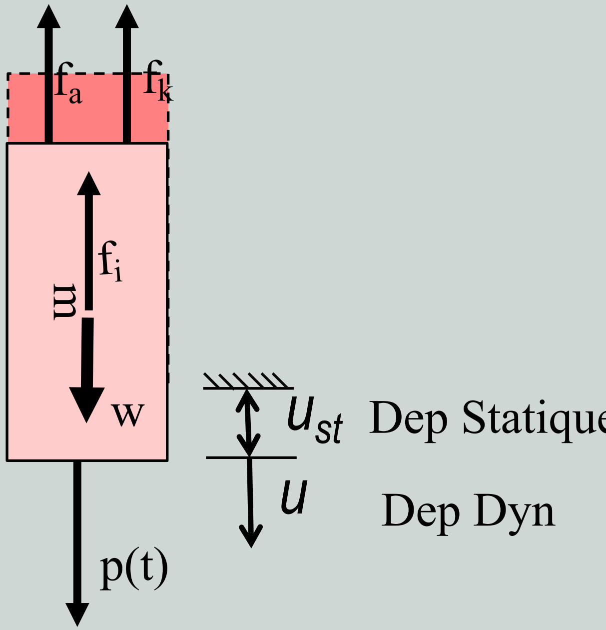
Equilibre avant application de p(t) (équilibre statique)

$$\boldsymbol{f_{st} = w = k.ust}$$

Après application de p(t)

$$f_i + f_a + f_k + f_{st} = p(t) + w$$

$$\boldsymbol{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) + kust = p(t) + w}$$



Rem: Seul le ressort est affecté par le déplacement.

Et $\ddot{u}_{tot} = \ddot{u}$ **et** $\dot{u}_{tot} = \dot{u}$

Equation du mouvement non affectée par la force statique.

Prendre repère dynamique à partir de l'équilibre statique

Déplacement total = statique + dynamique

Base des règles de conception

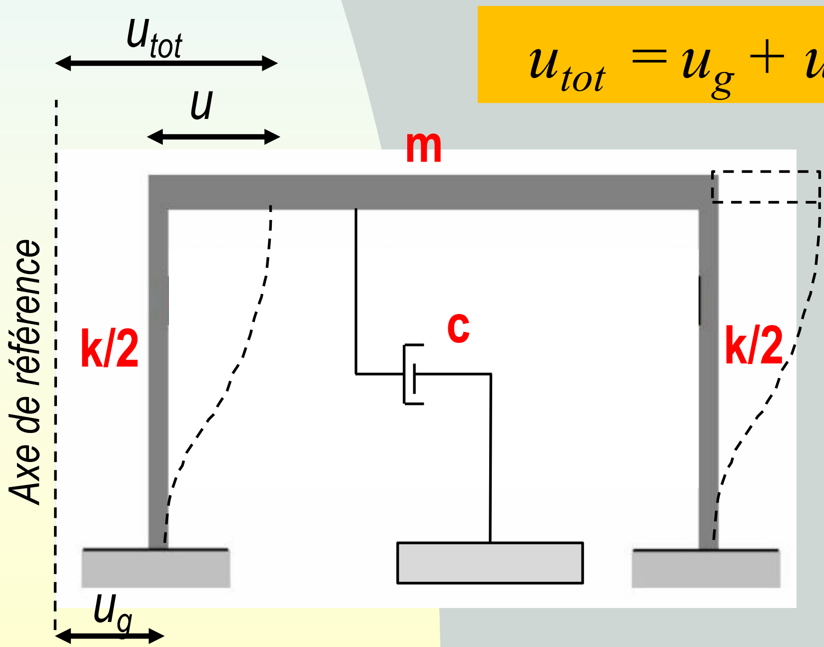
6. Influence d'une excitation du support

i. Structure flexible.

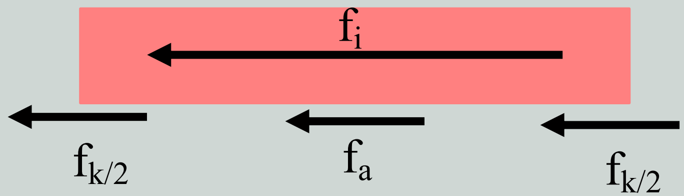
Structure soumise à un mouvement de ses appuis ou bien d'ancrage.

Ex: Transmission des secousses sismiques aux fondations d'un bâtiment.

Transmission des vibrations d'un bâtiment au bâti d'une machine se trouvant dans le bâtiment.

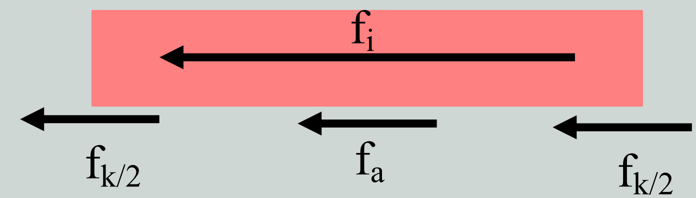


$$u_{tot} = u_g + u$$



- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur la poutre.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement.**
- ✓ **Seul DDL, possibilité de flexion des poteaux.**

Influence d'une excitation du support



L'équation du mouvement:

$$f_i + f_a + f_k = 0$$

Avec : $f_i = m\,\ddot{u}_{tot}\ ;\ f_a = c\,\dot{u}\ ;\ f_k = k\,u$

En remplaçant, on aura:

$$m\,\ddot{u}_{tot}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Or; $u_{tot} = u_g + u$ **D'où**

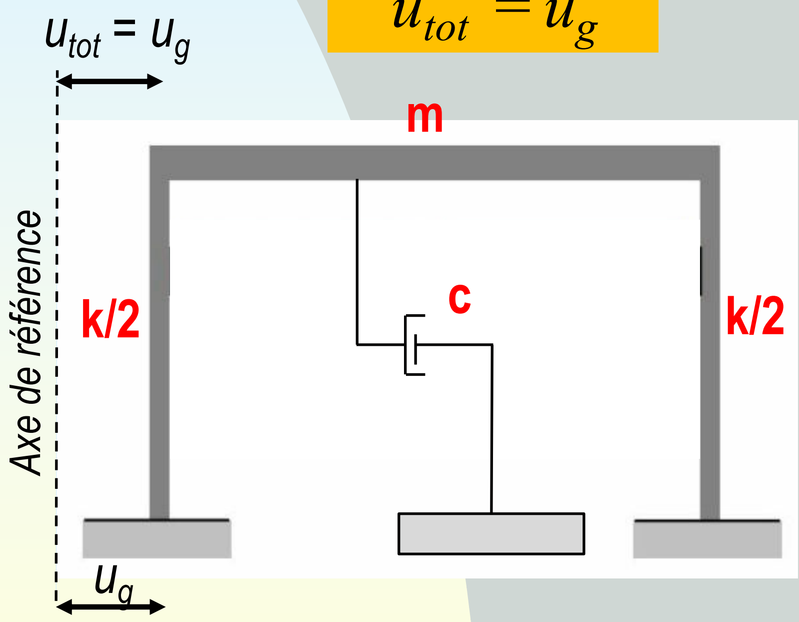
$$\boxed{m\,\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\,\ddot{u}_g(t) = \mathrm{peff(t)}} \qquad \textbf{(2.17)}$$

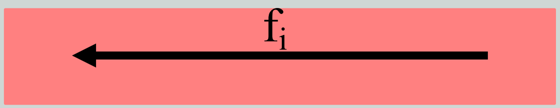
Où p_{eff}(t) représente un chargement effectif du à l'excitation des appuis.

ii. Structure rigide.

C'est toute la structure qui bouge dans un sens. (Mouvement de corps rigide, pas de déformation des éléments de la structure)

$$u_{tot} = u_g$$





$$f_i = m\,\ddot{u}_{tot} = m\,\ddot{u}_g$$

Il n'y a pas d'effet de rigidité et d'amortissement.

On parle directement de l'effort tranchant à la base (selon les codes).

Exemple:

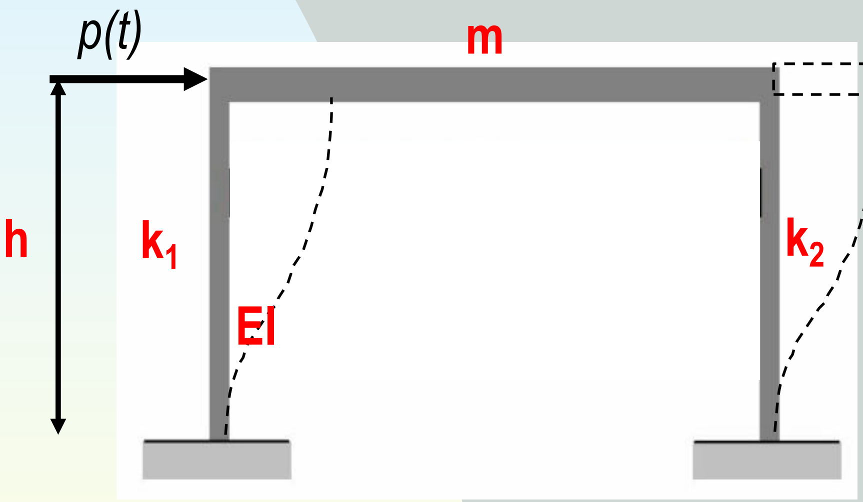
$$V = \frac{w}{g}\ddot{u}_g = C.w$$

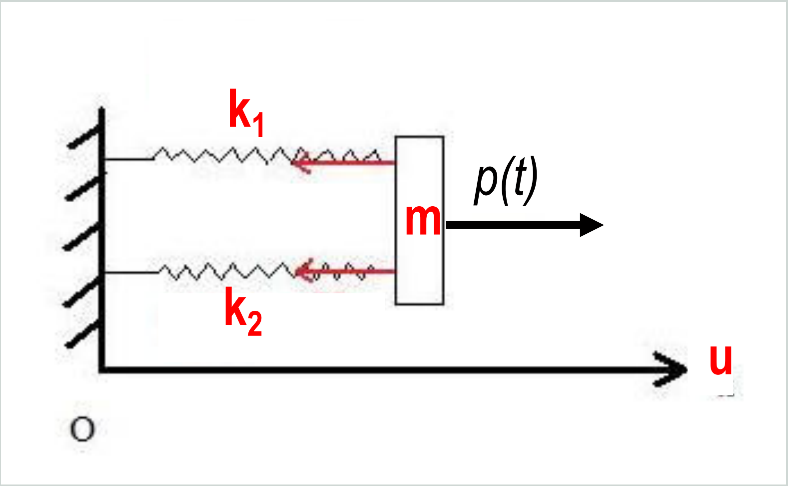
Avec : C : rapport entre l'accélération du sol et la pesanteur. (C = 0.12 – 0.15)

7. Modélisation des rigidités des S1DDL

Prendre en considération le nombre et les dispositions des rigidités selon les structures étudiées.

i. Exemple 1 : Portique simple à 01 étage.

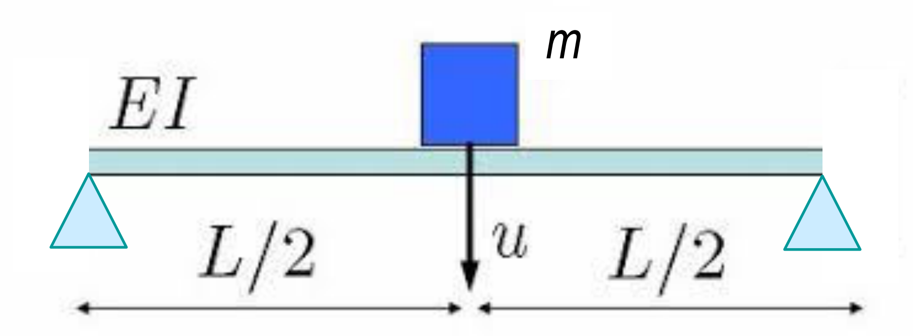


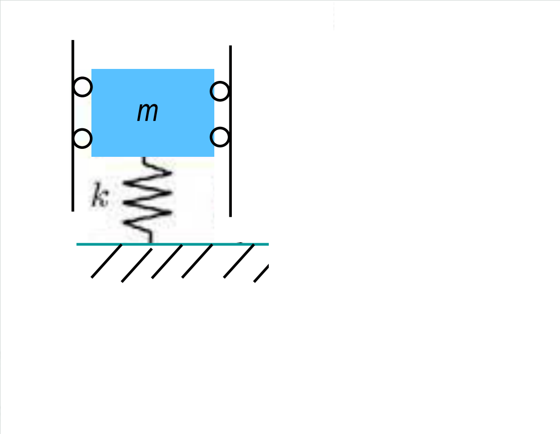


Les poteaux sont en parallèles et considérés comme encastré-encastré. D'où, pour un poteau :

$$k = 12\frac{EI}{h^3}$$

ii. Exemple 2 : Poutre sur appui simple.

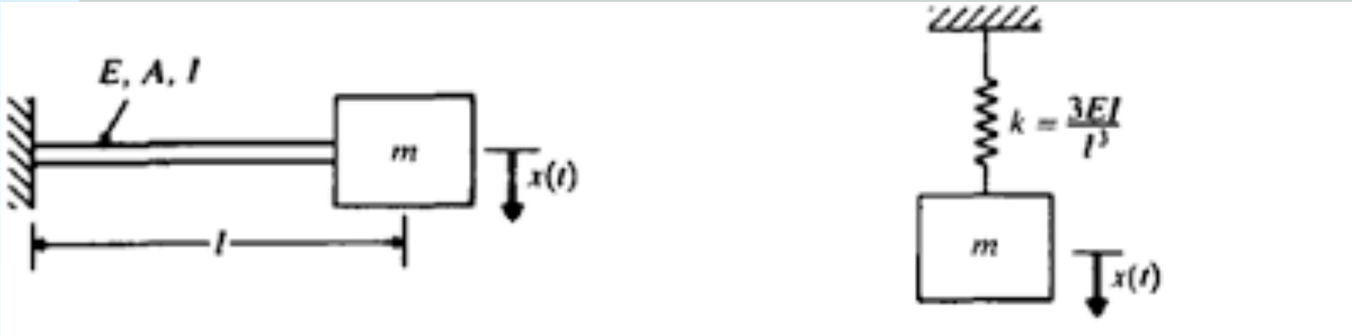




Pour un élément appuyé-appuyé, on aura :

$$k = 48\frac{EI}{L^3}$$

iii. Exemple 3 : Console

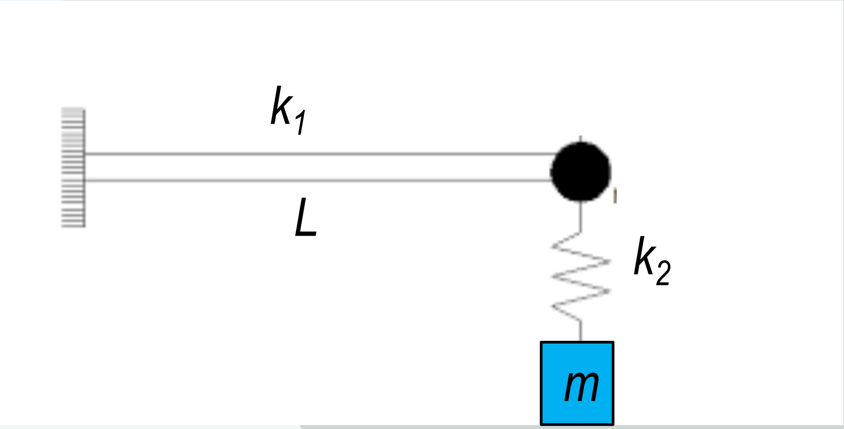


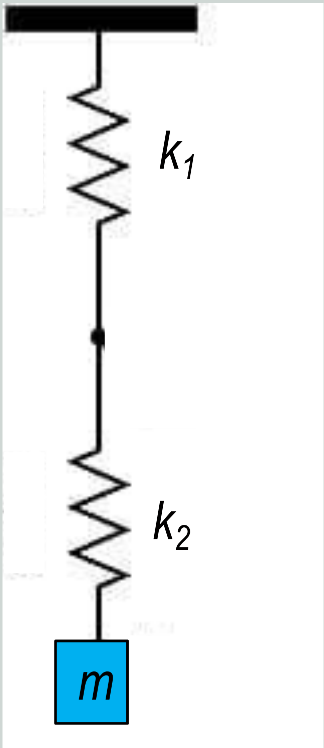
–a– Système effectif –b– Modèle à un degré de liberté

Pour un élément en console (encastré-libre):

$$k = 3\frac{EI}{L^3}$$

iv. Exemple 4 : Console + ressort.





Masse de la poutre négligée devant « m »

Nœud commun sans masse.

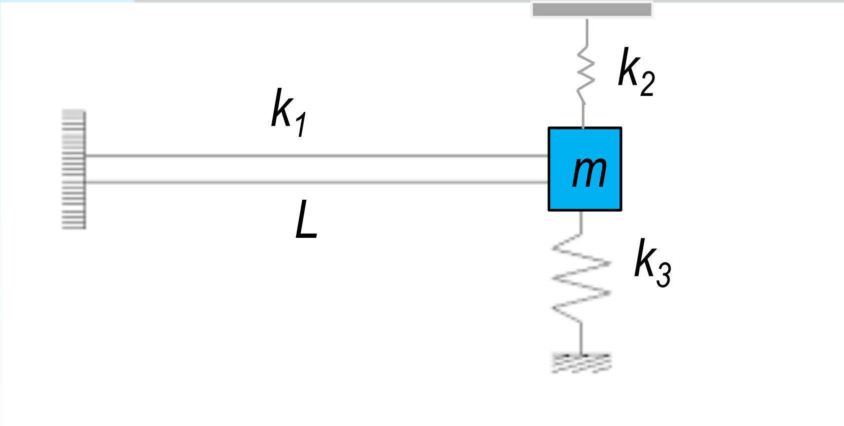
Masse à l'extrémité du ressort

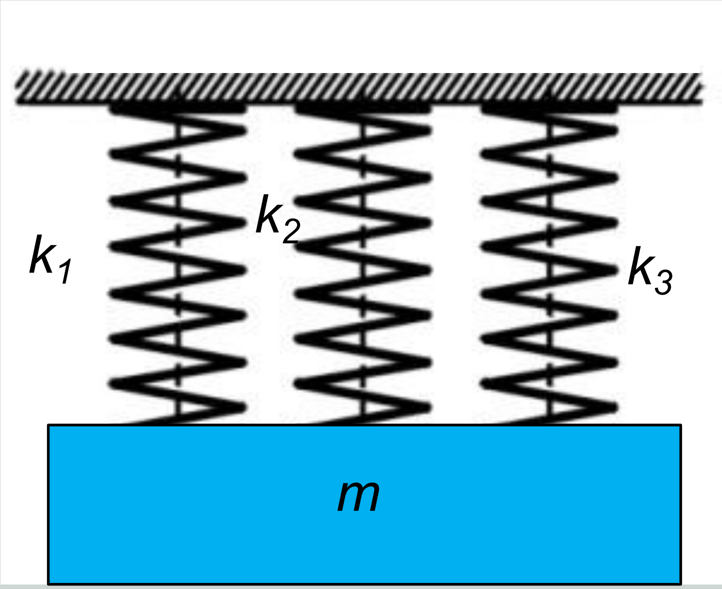
Les 02 rigidités k_1 et k_2 sont en série

Pour un élément encastré-libre, on aura :

$$k_1 = 3\frac{EI}{L^3}$$

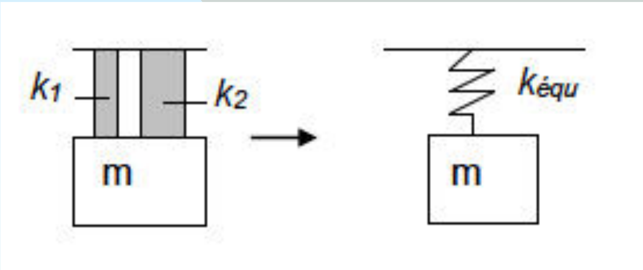
v. Exemple 5 : Console + 02 ressorts.





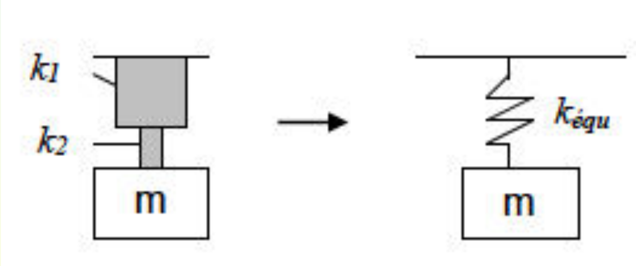
Les 03 ressorts sont en parallèle.

Ressorts en parallèle



$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \ ... + kn \qquad \textbf{(2.18)}$$

Ressorts en série



$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n} \qquad \textbf{(2.19)}$$

L'analogie avec l'électricité avec des résistances ou condensateurs à la place des ressorts.

8. Différents cas des types de comportement

Suivant la présence ou non de l'amortissement et de la charge extérieure, on distingue 04 cas de mouvement dynamique

- **S1DDL**
  - **Non amorti** C=0
    - **Libre** P(t)=0 : $m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$
    - **Forcé** P(t)≠0 : $m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t)$
  - **Amorti** C≠0
    - **Libre** P(t)=0 : $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$
    - **Forcé** P(t)≠0 : $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$

Merci. **Fin du chapitre 2**

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 3

Vibrations libres des systèmes à 01 DDL

COURS 3 **Dimanche 09.10.2022**