Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 12

Analyse spectrale des SPDDL

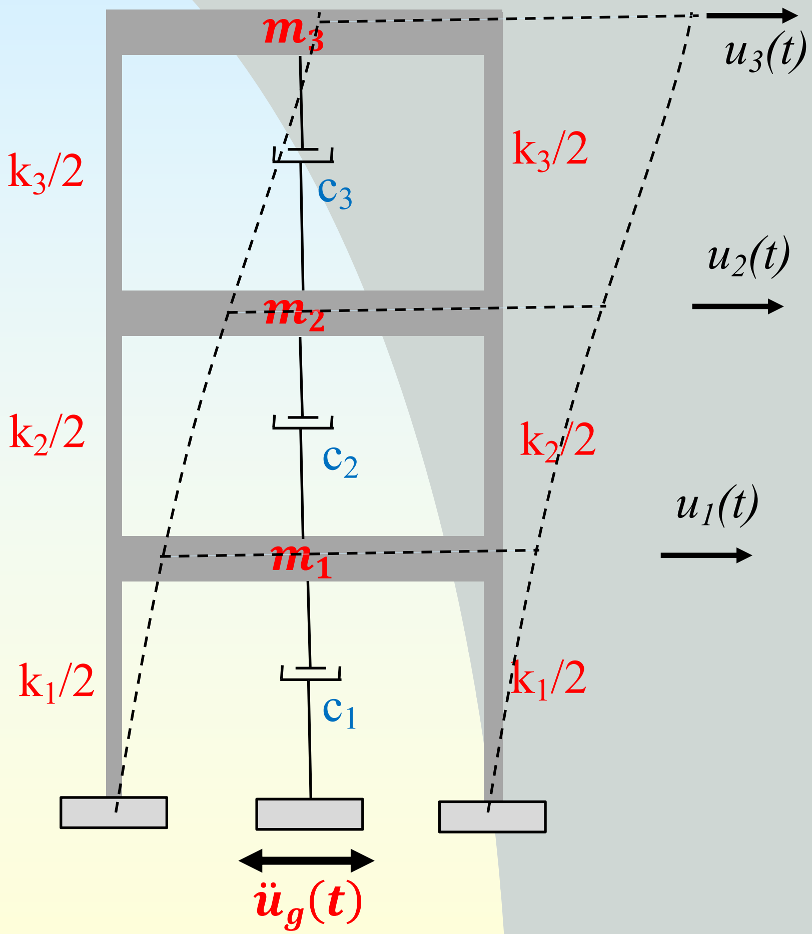
 © *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

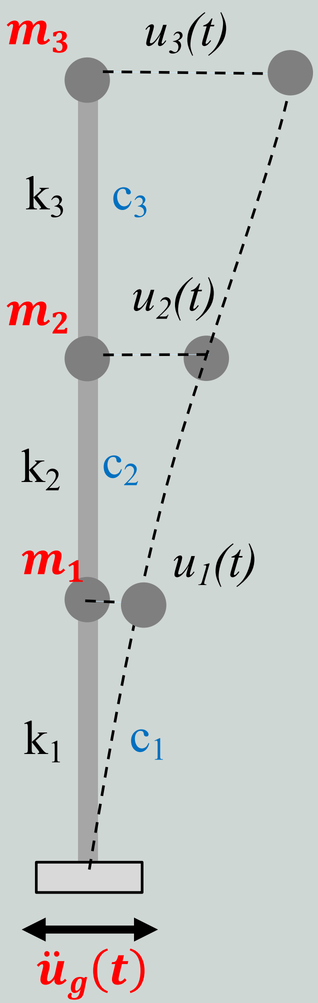
1. Introduction

- Force extérieure différente de zéro. Appliquée sous forme d'excitation du support
- L'excitation du support souvent exprimée sous forme de graphe d'accélération du support en fonction du temps.
- Concerne donc le calcul des structures soumises à un tremblement de terre.
- La méthode constitue la base du calcul sismique des structures dans le cas de structures particulières (là où les méthodes statiques équivalentes ne peuvent pas être appliquées).
- La démarche est la même que précédemment par analyse modale en superposant les réponses obtenues à partir d'un spectre spécifique.
- On travaille généralement avec des spectres de réponse.
- Recommandé dans la plupart des règlements parasismiques ayant leur propre spectre de calcul.

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

2. Réponse due à une excitation du support

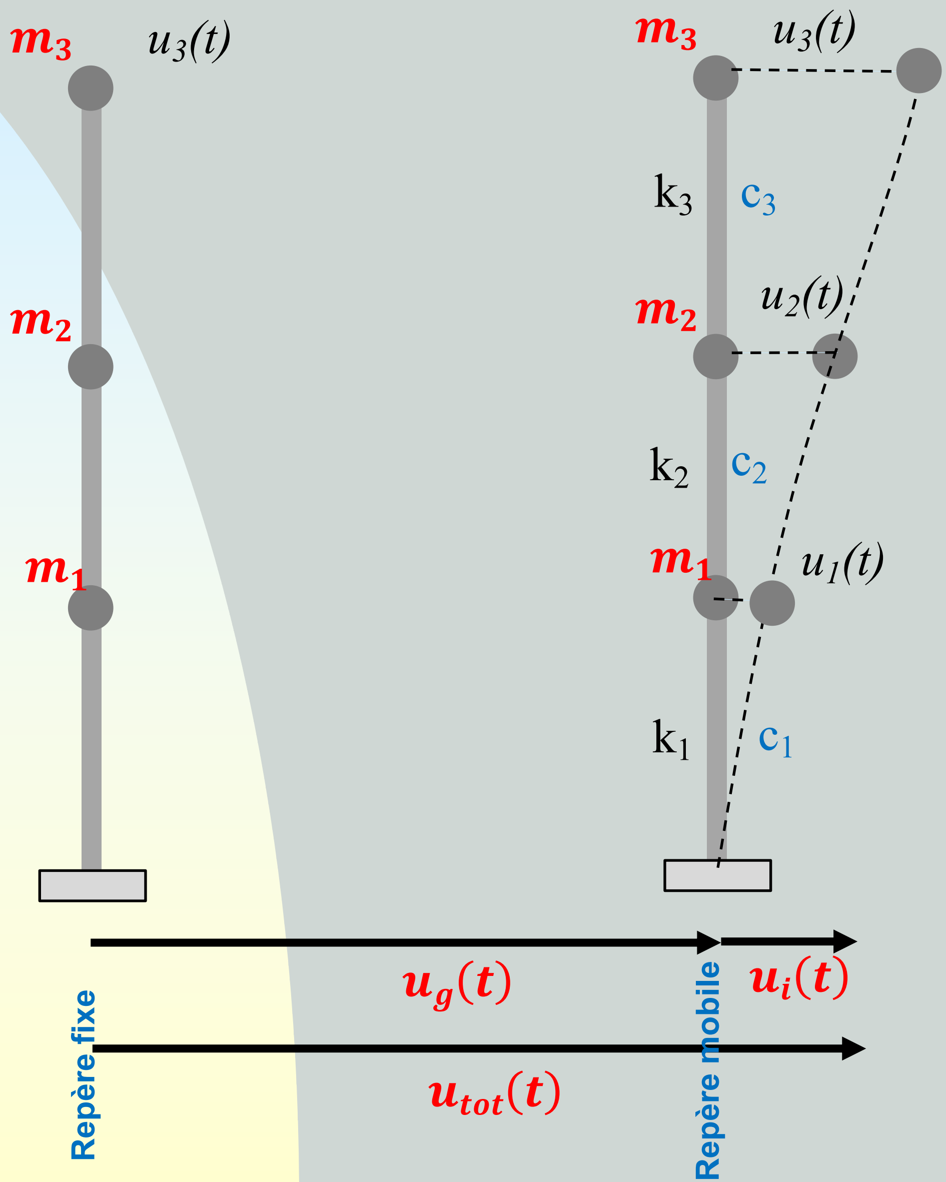




- ✓ **Poutre très rigide.**
- ✓ **Masse totale concentrée sur chaque plancher.**
- ✓ **Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.**
- ✓ **Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 03 niveaux.**

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Déplacement absolu et déplacement relatif



- ✓ u_{tot}: déplacement des DDL par rapport au repère absolu (support).
- ✓ u: déplacement des DDL par rapport au repère relatif (repère mobile).
- ✓ u_g: déplacement du support par rapport au repère absolu (support).

$$U_{tot} = U + \Delta\, u_g(t) \qquad (12.1)$$

Δ : Vecteur donnant la direction de la sollicitation.

Il a pour composante:
« 1 » dans a direction du mouvement de translation
« 0 » pour les autres DDL

Exemple de la figure. 1DDL par nœud (Translation)

$$\Delta^T = \{1 \quad 1 \quad 1\}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Rappel : Eq., de mouvement d'un SPDDL avec excitation du support (8.15)

$$M\,\ddot{U} + C\,\dot{U} + K\,U = -M\ddot{U}_g$$

U: déplacement relatif

On découpe ce système en utilisant la méthode de la décomposition modale,

Avec $U = \Phi\,Y$ alors $\dot{U} = \Phi\dot{Y}$ et $\ddot{U} = \Phi\ddot{Y}$

On aura:

$$\phi_n^T M \Phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \Phi_n \dot{y}_n + \phi_n^T K \Phi_n y_n = -\phi_n^T M \ddot{U}_g$$

Ou bien

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n} \qquad (12.2)$$

Avec : $p(t) = -M\ddot{U}_g$

$P_n = \phi_n^T p(t)$

$$M_n = \phi_n^T M \Phi_n$$
$$C_n = \phi_n^T C \Phi_n$$
$$K_n = \phi_n^T K \Phi_n$$
$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

$\frac{C_n}{M_n} = 2\xi_n\omega_n$ et $\frac{K_n}{M_n} = \omega_n^2$ (12.3)

Les termes à droite de l'équation (12.1) sont tous proportionnels à l'accélération du support (Même fonction) alors que dans le cas général, p(t) peut changer d'un DDL à un autre.
Problème plus simple à résoudre

Réponse due à une excitation du support

$$\ddot{y}_n + 2\boldsymbol{\xi_n \omega_n \dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = \frac{P_n}{M_n} = -\phi_n^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}\ddot{u}_g \qquad \textbf{(12.4)}$$

Sous une autre forme, sachant que le terme de droite s'écrit:

$$-\phi_n^T \boldsymbol{M}\ddot{U}_g = -\phi_n^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}\ddot{u}_g \qquad \textbf{(12.5)}$$

En posant

$$\Gamma_n = \phi_n^T \boldsymbol{M}\{\Delta\} \qquad \textbf{(12.6)}$$

Γ_i **: Facteur de participation modale**

On aura:

$$\ddot{y}_n + 2\boldsymbol{\xi_n \omega_n \dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = -\Gamma\, \ddot{u}_g \qquad \textbf{(12.7)}$$

Avec:

Pour des modes propres normalisés

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji} \qquad \textbf{i=1, 2, …,n} \qquad \textbf{(12.8)}$$

Pour le cas général

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}}{\phi_n^T \boldsymbol{M}\emptyset_n} \qquad \Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \emptyset_{ji}^2} \qquad \textbf{i=1, 2, …,n} \qquad \textbf{(12.9)}$$

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FT-Tlemcen*

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = -\Gamma\, \ddot{u}_g$$

3. Solution temporelle

- **L'équation (12.7) est un système d'équations linéaires découplées.**
- **Chaque terme de cette équation représente S1DDL.**
- **On peut donc utiliser n'importe quelle méthode pour calculer la réponse de chaque DDL.**
- **Soit la méthode de l'intégrale de Duhamel:**

Soit, par exemple pour des CI nulles et système amorti

$$y_j(t) = -\frac{\Gamma_j}{m_j\omega_{aj}}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\xi\omega_j(t-\tau)}\sin\big(\omega_{aj}(t-\tau)\big)d\tau \qquad \textbf{(12.10)}$$

Avec (12.9), $\Gamma_j = \dfrac{\phi_j^T M\{\Delta\}}{\phi_j^T M \phi_j}$ **Le déplacement U_j, dans le mode « j » s'écrit:**

En posant $y_j(t) = \Gamma_j q_j(t)$ **(12.11)** **On aura:** $U_j = \phi_j y_j = \Gamma_j \phi_j q_j(t)$ **(12.12)**

$q_j(t)$ **est solution de l'équation**

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\,\ddot{u}_g \qquad \textbf{(12.13)}$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Solution temporelle

Avec $\Gamma_j = \dfrac{\phi_j^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}}{\phi_j^T \boldsymbol{M} \emptyset_j}$ **Si on calcule** $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \emptyset_j$ **???**

On aura:

Due à l'orthogonalité par rapport à M $\phi_i^T \boldsymbol{M} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \emptyset_j = \phi_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i \Gamma_i$ $\phi_i^T \boldsymbol{M} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \emptyset_j = \phi_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i \Gamma_i$

Or (12.9), $\Gamma_i = \dfrac{\phi_i^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}}{\phi_i^T \boldsymbol{M} \emptyset_i}$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \emptyset_j = \{\Delta\} \qquad \textbf{(12.14)}$$

Propriété importante des coefficients de participation

Une fois le réponse $q_j(t)$ de chaque mode connue, le déplacement total sera:

$$U(t) = \sum_{j=1}^{n} U_j = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \emptyset_j q_j(t) \qquad \textbf{(12.15)}$$

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FT-Tlemcen*

4. Calcul des efforts

Une fois la réponse dans le mode « j » déterminée (12.12), $U_j = \phi_j y_j = \Gamma_j \phi_j q_j(t)$
l'effort élastique sera:

$$\mathrm{F_{kj}}{=}\mathrm{K}U_j = \Gamma_j K\,\phi_j\,q_j(t)$$

Or d'après l'équation du problème propre:

$$\left(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\omega_j^2 M}\right)\{\boldsymbol{\phi_j}\} = 0 \qquad \textbf{D'où} \qquad \boldsymbol{K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j}$$

En remplaçant, on aura:

$$\mathrm{F_{kj}}{=}\Gamma_j K\,\phi_j\,q_{j(t)} = \Gamma_j\,\omega_j^2\,M\,\phi_j\,q_{j(t)} \qquad \textbf{(12.16)}$$

F_{kj} : Produit de la masse par une quantité ayant la dimension d'une accélération

L'effort total, par superposition:

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^{n} F_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\,\omega_j^2\,M\,\phi_j\,q_{j(t)} \qquad \textbf{(12.17)}$$

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FT-Tlemcen*

5. Calcul des valeurs maximales de la réponse

On cherche d'abord la valeur maximale par mode :

i. Valeur maximale par mode

On est passé de $y_j(t)$ **solution de** $\ddot{y}_n + 2\boldsymbol{\xi_n \omega_n \dot{y}_n} + \boldsymbol{\omega_n^2} y_n = -\boldsymbol{\Gamma}\, \ddot{u}_g$ **à** $q_j(t)$ **(**$y_j(t) = \boldsymbol{\Gamma_j} q_j(t)$ **) solution de l'équation** $\ddot{q}_j + 2\boldsymbol{\xi_j \omega_j \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega_j^2} q_j = -\,\ddot{u}_g$

Solution de « $q_j(t)$ » par l'intégrale de Duhamel

$$q_j(t) = -\frac{1}{\omega_{aj}} \int_0^{t} \ddot{u}_g(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{e}^{-\xi\omega_j(t-\boldsymbol{\tau})} sin\big(\omega_{aj}(t-\tau)\big) d\boldsymbol{\tau} \qquad \textbf{(12.18)}$$

Généralement, on n'a pas besoin de toute la réponse due à l'excitation, seul le maximum est intéressant:

On utilisera donc des spectres de réponse directement (Voir chapitre 7).

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

On rappelle le spectre de réponse en déplacement :

$$\mathrm{S_D}(\omega_j,\xi_j) = max\left[-\frac{1}{\omega_{aj}}\int_0^{\mathrm{t}} \ddot{u}_g(\boldsymbol{\tau})e^{-\xi\omega_j(t-\boldsymbol{\tau})}sin\big(\omega_{aj}(t-\tau)\big)d\boldsymbol{\tau}\right] \qquad \textbf{(12.19)}$$

On peut aussi avoir le spectre de réponse en pseudo-accélération

$$\mathrm{S_A}(\omega_j,\xi_j) = \omega_j^2\ \mathrm{S_D}(\omega_j,\xi_j) \qquad \textbf{(12.20)}$$

Le déplacement maximal sera alors (12.12):

$$\boldsymbol{U_{jmax}} = \phi_j y_{jmax} = \Gamma_j\,\phi_j\,q_{jmax(t)} = \boldsymbol{\Gamma_j\ \phi_j\,\mathrm{S_D}(\omega_j,\xi_j)} \qquad \textbf{(12.21)}$$

Et l’effort maximal sera alors (12.16):

$$\boldsymbol{F_{kjmax}}=\Gamma_j\,\omega_j^2\ M\ \phi_j\,q_{jmax(t)} = \Gamma_j\,\omega_j^2\ M\ \phi_j S_D(\omega_j,\xi_j)=\boldsymbol{\Gamma_j\,M\ \phi_j\,S_A(\omega_j,\xi_j)} \qquad \textbf{(12.22)}$$

ii. Valeur maximale de la réponse totale

Une fois les réponses maximales par mode sont calculées (12.21), on calcul la réponse maximale totale par superposition

Méthode de la somme des valeurs absolues (AVS).

Le déplacement maximal

$$u_{imax} = \sum_{j=1}^{n} \left|\Gamma_j \phi_{ij} S_{Dj}\right| \qquad (12.23)$$

L'accélération maximale

$$\ddot{u}_{imax} = \sum_{j=1}^{n} \left|\Gamma_j \phi_{ij} S_{Aj}\right| \qquad (12.24)$$

Généralement surestime (Borne supérieure)

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

ii. Valeur maximale de la réponse totale

Une fois les réponses maximales par mode sont calculées (12.21), on calcul la réponse maximale totale par superposition

On préfère utiliser la méthode SRSS

Méthode de racine carrée de la somme des carrés (SRSS).

Le déplacement maximal

$$u_{imax} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Gamma_j \phi_{ij} S_{Dj}\right)^2} \qquad (12.25)$$

L'accélération maximale

$$\ddot{u}_{imax} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Gamma_j \phi_{ij} S_{Aj}\right)^2} \qquad (12.26)$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Méthode de la combinaison quadratique complète (CQC).

Généralement la méthode SRSS est exprimée comme suit:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R_i)^2} \qquad (12.27)$$

R est la réponse estimée (force, déplacement, accélération…) à une coordonnée spécifiée et R_i est la réponse maximale du mode « i » à la même coordonnée.

Problème au cas où certains modes sont très proches, SRSS donne des résultats grossiers en sous-estimant ou bien surestimant la réponse maximale.

Très proche : La différence entre 02 fréquences naturelles est de l'ordre de 10% de la plus petite fréquence.

i.e. $\omega_i / \omega_j \in [0.9, 1.1]$

CQC : Complete Quadratic Combinations

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

CQC : basée sur la théorie des vibrations aléatoires (Wilson et al. 1981).

Considérée comme une extension de la SRSS

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_j \rho_{ij} R_i} \qquad \textbf{(12.28)}$$

Avec:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i\xi_j\omega_i\omega_j}\left(\omega_i\xi_i + \omega_j\xi_j\right)\omega_i\omega_j}{\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)^2 + 4\xi_i\xi_j\left(\omega_i^2 + \omega_j^2\right)\omega_i\omega_j + 4\left(\xi_i^2 + \xi_j^2\right)\omega_i^2\omega_j^2} \qquad \textbf{(12.29)}$$

Pour un amortissement modal constant. i.e. $\xi_i = \xi_j = \xi$

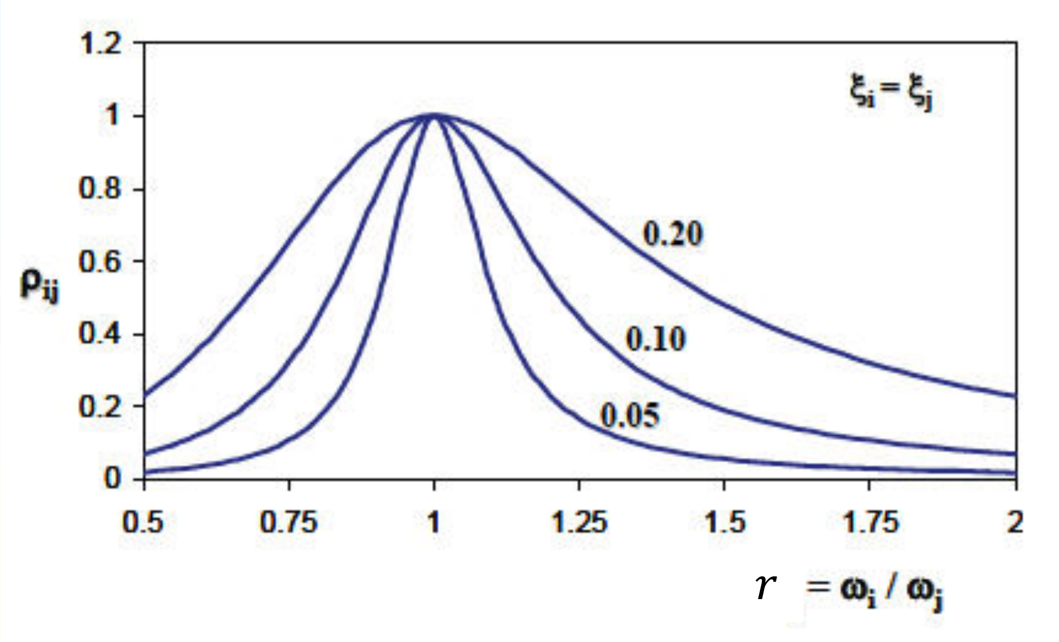
$$\rho_{ij} = \frac{8(\xi)^2(1 + r)r^{3/2}}{(r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 r(1 + r)^2 + 8\xi^2 r^2} \qquad \textbf{(12.30)}$$

Où: $r = {}^{\omega_i}/_{\omega_j}$ **Correspond aux modes « i » et « j »**

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Pour un amortissement modal constant. i.e. $\xi_i = \xi_j = \xi$

$$\rho_{ij} = \frac{8(\xi)^2(1+r)r^{3/2}}{(r^2-1)^2 + 4\xi^2 r(1+r)^2 + 8\xi^2 r^2} \qquad (12.31)$$



Pour i=j (r=1) $\rho_{ij} = 1$ **pour n'importe quelle valeur de «** ξ **» y compris «**$\xi = 0$ **».**

CQC est identique à SRSS

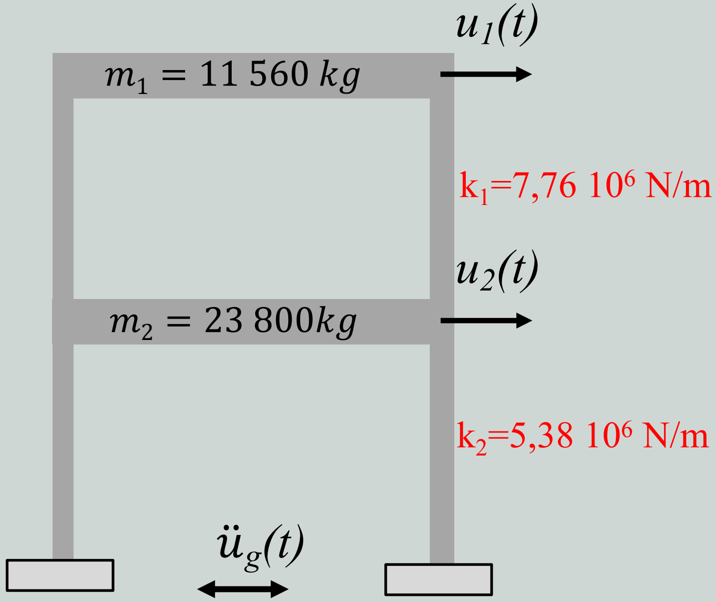
Exemple 1

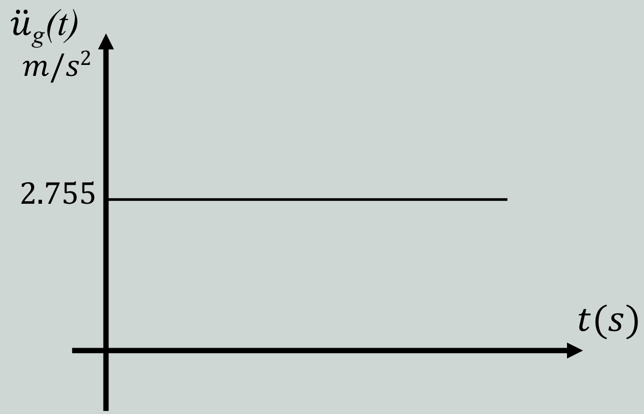
Considérons le portique à 02 étages de la figure ci-contre avec les données mentionnées, soumis à une accélération du support montrée en figure. En supposant que l'amortissement est négligé,

i) Déterminer la réponse de ce portique à t=3.0 s

ii) Calculer la force de cisaillement à la base à t=3.0 s

iii) Calculer les déplacements maximums par les méthodes de la somme des valeurs absolues et par la SRSS





- ✓ Poutre très rigide.
- ✓ Masse totale concentrée sur chaque plancher.
- ✓ Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.
- ✓ Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 02 niveaux.

Méthode spectrale.

Exemple 1

Matrices ?

Rigidité : $K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$ **Masse :** $M = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 \end{bmatrix}$

AN :

$$K = \begin{bmatrix} 7.76\ 10^6 & -7.76\ 10^6 \\ -7.76\ 10^6 & 13.14\ 10^6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 11560 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 23800 \end{bmatrix}$$

Ainsi, on résout (9.6) $\boldsymbol{det}|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0$

Posons « $\lambda = \omega_i^2$ **», on aura**

$$\boldsymbol{det}\begin{vmatrix} 7.76\ 10^6 - 11560\ \lambda & -7.76\ 10^6 \\ -7.76\ 10^6 & 13.14\ 10^6 - 23800\ \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Solutions :

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 140$ **D'où :** $\omega_1 = 11.83\ rd/s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 1083$ **D'où :** $\omega_1 = 32.9\ rd/s$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Exemple 1

Modes propres ?

Pour chaque ω_i on résout le système $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = 0$

i. $\omega_i = \omega_1 = 11.83\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 7.76\ 10^6 - 11560\ (140) & -7.76\ 10^6 \\ -7.76\ 10^6 & 13.14\ 10^6 - 23800(140) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{11}} \\ \boldsymbol{\phi_{21}} \end{Bmatrix} = 0$$

En posant $\boldsymbol{\phi_{11}} = \mathbf{1}$, on aura $\boldsymbol{\phi_{21}} = \mathbf{0.79}$

ii. $\omega_i = \omega_1 = 32.9\ rd/s$

$$\begin{bmatrix} 7.76\ 10^6 - 11560\ (1083) & -7.76\ 10^6 \\ -7.76\ 10^6 & 13.14\ 10^6 - 23800(1083) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi_{12}} \\ \boldsymbol{\phi_{22}} \end{Bmatrix} = 0$$

En posant $\boldsymbol{\phi_{12}} = \mathbf{1}$, on aura $\boldsymbol{\phi_{22}} = \mathbf{-0.61}$

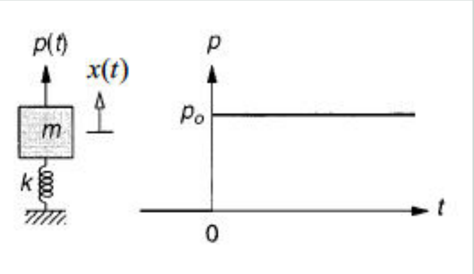
D'où

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.79 & -0.61 \end{bmatrix}$$

Matrice modale

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*

Exemple 1



Ainsi l'équation du mouvement sera :

$$M_i\,\ddot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = P_i$$

Avec: $M_i = \phi_i^T M \Phi_i$; $K_i = \phi_i^T K \Phi_i$ et $P_i = \phi_i^T \boldsymbol{M}\{\Delta\}\ddot{u}_g$

Le problème à 1SDDL a été traité dans le chap 5, pour une excitation en échelon

Solution : (Voir Chap (5) : $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$.

Avec: $y_c(t) = [(A\,cos\omega_i t + B\,sin\omega_i t)]$ **et** $y_p(t) = \dfrac{P_i}{K_i}$

D'où $y_i(t) = \dfrac{P_i}{K_i} + [(A\,cos\omega_i t + B\,sin\omega_i t)]$

Soit les CI: $y(0) = y_0$ et $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

$$y_i(t) = \frac{P_i}{K_i} + \left[\left(y_0 - \frac{P_i}{K_i}\right) cos\omega_i t + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_i}\right) sin\omega_i t\right]$$

Dans notre cas le système est au repos: $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$

D'où

$$y_i(t) = \frac{P_i}{K_i}[1 - cos\omega_i t]$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Exemple 1

$$y_i(t) = \frac{P_i}{K_i}[1 - cos\omega_i t]$$

$$M_i = \phi_i^T M \Phi_i \; ; K_i = \phi_i^T K \Phi_i \text{ et } P_i = \phi_i^T \boldsymbol{M}\{\mathbf{1}\}\ddot{u}_g$$

Pour chaque valeur de i=1, 2, 3 on calcule K_i et P_i

$$K_1 = \{1.0 \quad 0.79\}\begin{bmatrix} 7.76\;10^6 & -7.76\;10^6 \\ -7.76\;10^6 & 13.14\;10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.79 \end{Bmatrix} = 3.7\;10^6\,(N/m)$$

$$K_2 = \{1.0 \quad -0.61\}\begin{bmatrix} 7.76\;10^6 & -7.76\;10^6 \\ -7.76\;10^6 & 13.14\;10^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.61 \end{Bmatrix} = 22.1\;10^6\,(N/m)$$

$$P_1 = \{1.0 \quad 0.79\}\begin{bmatrix} 11560 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 23800 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} 2.755 \;= 83.64\;10^3\,(N)$$

$$P_2 = \{1.0 \quad -0.61\}\begin{bmatrix} 11560 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 23800 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} 2.755 \;= -8.15\;10^3\,(N)$$

Ainsi, on aura:

$$y_i(t) = \frac{P_i}{K_i}[1 - cos\omega_i t]$$

$$y_1(t) = \frac{83.64\;10^3}{3.7\;10^6}[1 - cos 11.83\; t]$$

$$y_2(t) = \frac{-8.15}{22.1\;10^6}[1 - cos 32.9\; t]$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Exemple 1

Les solutions seront alors

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.6\,[1 - cos 11.83\,t] \\ -0.37[1 - cos 32.9\,t] \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Les déplacements relatifs seront :

$$\boldsymbol{U = \Phi\, Y}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.79 & -0.61 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 22.6\,[1 - cos 11.83\,t] \\ -0.37[1 - cos 32.9\,t] \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Le déplacement à t=3s , sera

$$\begin{Bmatrix} u_1(3) \\ u_2(3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.79 & -0.61 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 22.6\,[1 - cos 11.83\,(3)] \\ -0.37[1 - cos 32.9(3)] \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(3) \\ u_2(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 35.6 \\ 28.77 \end{Bmatrix} (\boldsymbol{mm})$$

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Exemple 1

Les forces de Cisaillement, 02 manières:

1. Par les déplacements relatifs

$$\boldsymbol{F_s = K\,U}$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{bmatrix} 7.76\;10^6 & -7.76\;10^6 \\ -7.76\;10^6 & 13.14\;10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 35.6 \\ 28.77 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 52.423 \\ 102.031 \end{Bmatrix} (N)$$

L'effort de cisaillement total à la base sera:

$$V_b = F_{s1} + F_{s2} = 52.423 + 102.031 = 154.454\;N$$

2. Par les déplacements généralisés

$$\boldsymbol{F_s = K\,U = K\Phi\,Y = \omega_i^2 M\Phi\,Y}$$

$$\{F_s\} = \omega_1^2 M\{\phi_1\}y_1 + \omega_2^2 M\{\phi_2\}y_2$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = \mathbf{140} \begin{bmatrix} 11560 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 23800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.79 \end{Bmatrix} (36.067\;10^{-3}) + \mathbf{1083} \begin{bmatrix} 11560 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 23800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.61 \end{Bmatrix} (-0.465\;10^{-3}) = \begin{Bmatrix} 52.423 \\ 102.031 \end{Bmatrix} (N)$$

$$\{\boldsymbol{F_s}\} = \begin{Bmatrix} 58.241 \\ 94.724 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.818 \\ 7.307 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 52.423 \\ 102.031 \end{Bmatrix} (N)$$

1er Mode **2ème Mode**

Même résultats

© Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

Calcul des déplacements maximums

Les déplacements généralisés sont :

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.6\,[1 - cos 11.83\, t] \\ -0.37[1 - cos 32.9\, t] \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} y_{1max} \\ y_{2max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45.20 \\ -0.74 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

a. Somme des valeurs absolues (AVS)

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.79 & -0.61 \end{bmatrix}$$

$$u_{imax} = |\emptyset_{i1} y_{1max}| + |\emptyset_{i2} y_{2max}| + \ldots + |\emptyset_{ii} y_{imax}| + \ldots + |\emptyset_{in} y_{nmax}|$$

$$u_{1max} = |\emptyset_{11} y_{1max}| + |\emptyset_{12} y_{2max}| = |(1)\,(45.20\ 10^{-3})\,| + |(1)\,(-0.74\ 10^{-3})| = 45.94\ mm$$

$$u_{2max} = |\emptyset_{21} y_{1max}| + |\emptyset_{22} y_{2max}| = |(0.79)\,(45.20\ 10^{-3})\,| + |(-0.61)\,(-0.74\ 10^{-3})| = 36.16\ mm$$

b. SRSS

$$u_{imax} = \sqrt{(\emptyset_{i1} y_{1max})^2 + (\emptyset_{i2} y_{2max})^2 + \cdots + (\emptyset_{ii} y_{imax})^2 + \cdots + (\emptyset_{in} y_{nmax})^2}$$

$$u_{1max} = \sqrt{(\emptyset_{11} y_{1max})^2 + (\emptyset_{12} y_{2max})^2} = \sqrt{((1)\,(45.20\ 10^{-3}))^2 + ((1)\,(-0.74\ 10^{-3}))^2} = 45.206\ mm$$

$$u_{2max} = \sqrt{(\emptyset_{21} y_{1max})^2 + (\emptyset_{22} y_{2max})^2} = \sqrt{((0.79)\,(45.20\ 10^{-3}))^2 + ((-0.61)\,(-0.74\ 10^{-3}))^2} = 35.71\ mm$$

AVS légèrement surestime par rapport SRSS

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FT-Tlemcen*

Merci. **Fin du chapitre 12**

© *Abdellatif MEGNOUNIF* *FSI-Tlemcen*

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Partie 3 : Conception parasismique

Chap. 13

Introduction à la conception parasismique

COURS 13

© *Abdellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen*