

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 11

Vibrations forcées des SPDD

1. Introduction

- **Force extérieure différente de zéro. Directement appliquée sur le nœud ou bien sous forme d'excitation du support**
- **L'amortissement peut ne pas être négligé.**
- **Réfléchir à ce qu'un SPDDL est la combinaison de plusieurs systèmes à 1SDDL.**
- **En pratique, on travaille dans la base des modes propres qui constitue une base orthogonale complète.**
- **Simplifie les calculs généralement et découple les équations.**

02 grandes méthodes pour la résolution des SPDDL forcés

Méthode de la superposition modale

- ❖ Toute position déformée d'une structure est la combinaison linéaire des modes de vibration.
- ❖ Transforme un système d'équations différentielles couplées en un système d'équations différentielles découplées.
- ❖ **Avantage** : Facile à utiliser
- ❖ **Inconvénients** : recherche d'un nombre important de modes propres.
- ❖ Valable uniquement pour les systèmes élastiques linéaires.

Méthode Pas-à-Pas

- ❖ Diviser la réponse en intervalle de temps.
- ❖ Calcul de la déformée à la fin du 1^{er} intervalle sur la base des CI et du chargement durant le 1^{er} intervalle.
- ❖ Solution du 1^{er} intervalle devient CI du 2^{ème} intervalle et ainsi de suite jusqu'au temps voulu.
- ❖ Valable pour les systèmes élastiques linéaires et les systèmes non linéaires

2. Méthode de superposition modale

i. Notion de coordonnées principales (normales)

Rappel : Eq., de mouvement d'un SPDDL (8.12)

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)$$

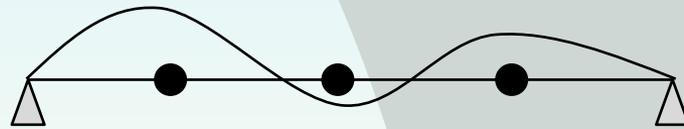
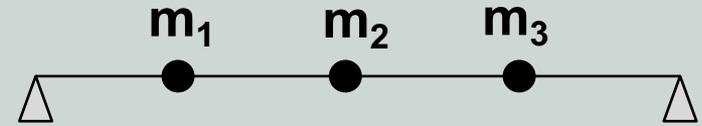
- On utilise les modes de vibration pour changer de base de coordonnées.
- Les modes représentent « n » allures de déplacements indépendantes, dont les amplitudes servent de coordonnées généralisées représentant un déplacement quelconque. (On pense comme le cas de développement en série de Fourier).
- Les mêmes avantages : Orthogonalité et bonne convergence avec quelques termes.

Prenons un exemple simple

Méthode de superposition modale

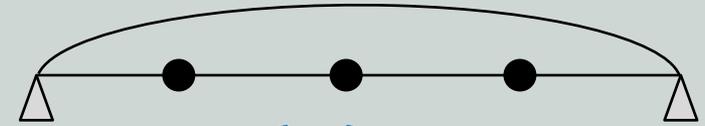
i. Notion de coordonnées principales (normales)

Exemple d'une poutre à 03 masses



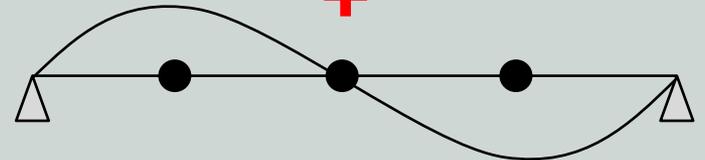
$$\{U\} = [\Phi] \{Y\}$$

=



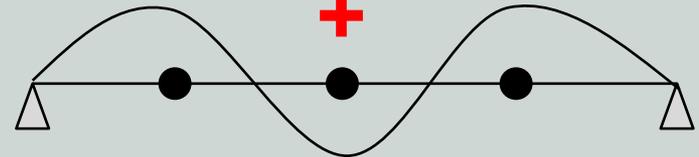
$$\{\phi_1\}y_1$$

+



$$\{\phi_2\}y_2$$

+



$$\{\phi_3\}y_3$$

Avec:

$[\Phi]$: Matrice modale (nxn)

$\{Y\}$: Vecteur coordonnées généralisées (nx1)

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$\{Y\}$: Appelées aussi coordonnées principales ou normales

Méthode de superposition modale

i. Notion de coordonnées principales (normales)

Ainsi, on pose

$$\{U\} = [\Phi] \{Y\} \quad (11.1)$$

$$\{U\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \dots + \{\phi_i\}y_i + \dots + \{\phi_n\}y_n$$

$$\{U\} = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\}y_i \quad (11.2)$$

- $[\Phi]$: Matrice modale (nxn) ayant les vecteurs modaux en **colonnes** et sont **indépendants**.
- D'où $[\Phi]$ est **régulière et inversible**.
- Généralement on évite **d'inverser** $[\Phi]$ pour calculer les $\{Y\}$
- On passe par la propriété **d'orthogonalité** pour résoudre le problème.

Le plus souvent, on utilise l'orthogonalité par la matrice masse

i. Notion de coordonnées principales (normales)

Pré multiplions (11.1) $\{U\} = [\Phi]\{Y\}$ par $\{\phi_n\}^T M$ de part et d'autre:

$$\{\phi_n\}^T M \{U\} = \{\phi_n\}^T M [\Phi]\{Y\}$$

$$\{\phi_n\}^T M \{U\} = \{\phi_n\}^T M \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_n\}^T M \{\phi_2\}y_2 + \dots + \{\phi_n\}^T M \{\phi_i\}y_i + \dots + \{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}y_n \quad (11.3)$$

➤ Due à l'orthogonalité, tous les termes s'annulent sauf le terme « n ».
Soit:

$$\{\phi_n\}^T M \{U\} = \{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}y_n$$

D'où

$$y_n = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{\{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}} \quad (11.4)$$

C'est l'équivalent des coefficients des séries de Fourier

ii. Découplage des équations

Rappel : Eq., de mouvement d'un SPDDL (8.12)

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)$$

Posons $U = \Phi Y$ alors $\dot{U} = \Phi \dot{Y}$ et $\ddot{U} = \Phi \ddot{Y}$ (11.5)

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on aura:

$$M\Phi\ddot{Y} + C\Phi\dot{Y} + K\Phi Y = p(t)$$

Pré multiplions cette eq. par $\{\phi_n\}^T$ de part et d'autre:

$$\phi_n^T M \Phi \ddot{Y} + \phi_n^T C \Phi \dot{Y} + \phi_n^T K \Phi Y = \phi_n^T p(t) \quad (11.6)$$

Due à l'orthogonalité des matrices, tous les termes s'annulent sauf le terme « n ».

Cas d'orthogonalité de la matrice d'amortissement ?

$$\phi_m^T C \Phi_n = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

Valable pour le cas de Rayleigh $C = a_0 M + a_1 K$ (8.23)

Méthode de superposition modale

ii. Découplage des équations

$$\phi_n^T M \Phi \ddot{Y} + \phi_n^T C \Phi \dot{Y} + \phi_n^T K \Phi Y = \phi_n^T p(t) \quad (11.6)$$

Ainsi, on aura:

$$\phi_n^T M \Phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T C \Phi_n \dot{y}_n + \phi_n^T K \Phi_n y_n = \phi_n^T p(t) \quad (11.7)$$

(1xn) (nxn) (nx1) (1x1)

On pose, les quantités scalaires:

$$\begin{aligned} M_n &= \phi_n^T M \Phi_n \\ C_n &= \phi_n^T C \Phi_n \\ K_n &= \phi_n^T K \Phi_n \\ P_n &= \phi_n^T p(t) \end{aligned} \quad (11.8)$$

On aura:

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{y}_n + K_n y_n = P_n \quad (11.9)$$

Pour chaque valeur de « n », on aura une équation.
Toutes les équations sont découplées (indépendantes)

Méthode de superposition modale

ii. Découplage des équations

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{y}_n + K_n y_n = P_n$$

En divisant le tout par M_n :

$$\ddot{y}_n + \frac{C_n}{M_n} \dot{y}_n + \frac{K_n}{M_n} y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Comme pour les S1DDL :

$$\frac{C_n}{M_n} = 2\xi_n \omega_n \quad \text{et} \quad \frac{K_n}{M_n} = \omega_n^2$$

Ainsi, on aura:

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n} \quad (11.10)$$

Résolution de cette équation = S1DDL
Duhamel, Pas-0-Pas, Harmonique, ...

ii. Découplage des équations

Problème des valeurs maximales ?

Sachant que : $\{U\} = [\Phi]\{Y\}$ est valable pour un « t » fixe.

Or les valeurs maximales de $\{Y\}$ ne se produisent pas pour le même « t », il faut passer par des approximations (prendre les bornes supérieures):

02 méthodes:

1. Méthode de la somme des valeurs absolues. (Surestime)

$$u_{imax} = |\phi_{i1}y_{1max}| + |\phi_{i2}y_{2max}| + \dots + |\phi_{ii}y_{imax}| + \dots + |\phi_{in}y_{nmax}| \quad (11.11)$$

2. Méthode de racine carrée de la somme des carrés (SRSS).

$$u_{imax} = \sqrt{(\phi_{i1}y_{1max})^2 + (\phi_{i2}y_{2max})^2 + \dots + (\phi_{ii}y_{imax})^2 + \dots + (\phi_{in}y_{nmax})^2}$$

La plus utilisée

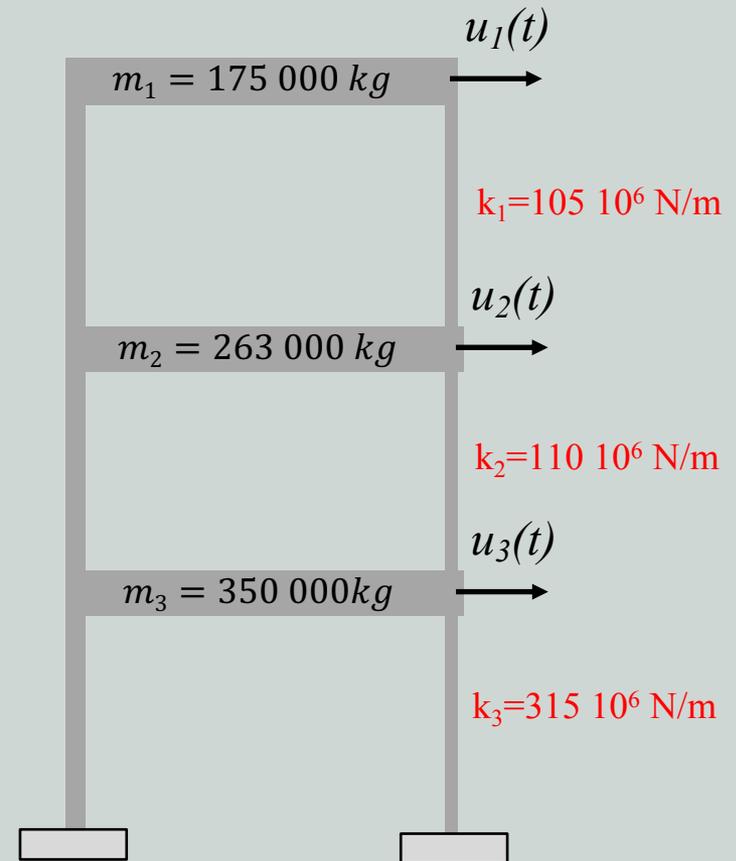
(11.12)

Exemple 1

Considérons le portique à 03 étages de la figure ci-contre avec les données mentionnées. En supposant que l'amortissement est négligé,

- i) Déterminer la réponse de ce portique due à un déplacement initial de (10mm, 7 mm, 5 mm) des masses m_1 , m_2 , m_3 respectivement au temps $t=1$ s.

- ✓ Poutre très rigide.
- ✓ Masse totale concentrée sur chaque plancher.
- ✓ Poteaux sans masses et ne se déforment pas verticalement, ni rotationnellement.
- ✓ Seuls DDLs, possibilité de flexion des poteaux, de façon dépendante entre les 03 niveaux.



Matrices ? (Attention à l'ordre de la numérotation)

$$\text{Rigidité : } K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \mathbf{0} \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ \mathbf{0} & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad \text{Masse : } M = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{AN : } K = \begin{bmatrix} 105 & -105 & 0 \\ -105 & 215 & -110 \\ 0 & -110 & 425 \end{bmatrix}_{x 106} \quad M = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & 263 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \end{bmatrix}_{x 103}$$

Ainsi, on résout (9.6) $\det|K - \omega^2 M| = 0$

Posons « $\lambda = \omega_i^2$ », on aura

$$\det \begin{vmatrix} 105 \cdot 10^3 - 175 \lambda & -105 \cdot 10^3 & 0 \\ -105 \cdot 10^3 & 215 \cdot 10^3 - 263 \lambda & -110 \cdot 10^3 \\ 0 & -110 \cdot 10^3 & 425 \cdot 10^3 - 350 \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Solutions :

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 210 \quad \text{D'où : } \omega_1 = 14.5 \text{ rd/s}$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 966 \quad \text{D'où : } \omega_2 = 31.1 \text{ rd/s}$$

$$\lambda_3 = \omega_3^2 = 2124 \quad \text{D'où : } \omega_3 = 46.1 \text{ rd/s}$$

Modes propres ?

Pour chaque ω_i on résout le système $(K - \omega^2 M)\{\phi\} = 0$

i. $\omega_i = \omega_1 = 14.5 \text{ rd/s}$

$$\begin{bmatrix} 105 \cdot 10^3 - 175(210) & -105 \cdot 10^3 & 0 \\ -105 \cdot 10^3 & 215 \cdot 10^3 - 263(210) & -110 \cdot 10^3 \\ 0 & -110 \cdot 10^3 & 425 \cdot 10^3 - 350(210) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = 0$$

En posant $\phi_{11} = 1$, on aura $\phi_{21} = 0.644$ et $\phi_{31} = 0.300$

ii. $\omega_i = \omega_2 = 31.1 \text{ rd/s}$

$$\begin{bmatrix} 105 \cdot 10^3 - 175(966) & -105 \cdot 10^3 & 0 \\ -105 \cdot 10^3 & 215 \cdot 10^3 - 263(966) & -110 \cdot 10^3 \\ 0 & -110 \cdot 10^3 & 425 \cdot 10^3 - 350(966) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = 0$$

En posant $\phi_{12} = 1$, on aura $\phi_{22} = -0.601$; $\phi_{32} = -0.676$

iii. $\omega_i = \omega_3 = 46.1 \text{ rd/s}$

$$\begin{bmatrix} 105 \cdot 10^3 - 175(2124) & -105 \cdot 10^3 & 0 \\ -105 \cdot 10^3 & 215 \cdot 10^3 - 263(2124) & -110 \cdot 10^3 \\ 0 & -110 \cdot 10^3 & 425 \cdot 10^3 - 350(2124) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = 0$$

En posant $\phi_{13} = 1$, on aura $\phi_{23} = -2.57$; $\phi_{33} = 2.47$

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Ainsi, les équations découplées seront (11.10)

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = 0$$

CI différent de Zéro

On obtient « n=3 » équations à 1SDDL, la solution est du type

$$y_i(t) = y_i(t=0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{y}_i(t=0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t)$$

Sachant que les CI sont exprimées en fonction de « u », il faut les transformer en « y ».

On : à t=0.

$$u_{t=0} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix} (mm)$$

Or, Eq. (11.4)

$$y_n = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{\{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}} = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{M_n}$$

$$y_n = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{\{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}} = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{M_n}$$

Pour chaque valeur de $n=1, 2, 3$ on calcule $M_n = \{\phi_n\}^T M \{\phi_n\}$

$$M_1 = \{1.0 \quad 0.644 \quad 0.3\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.644 \\ 0.3 \end{Bmatrix} = 315.5 \cdot 10^3$$

$$M_2 = \{1.0 \quad -0.601 \quad -0.676\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} = 430 \cdot 10^3$$

$$M_3 = \{1.0 \quad -2.57 \quad 2.47\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} = 4047 \cdot 10^3$$

Ainsi, à $t=0$, on aura: $y_n = \frac{\{\phi_n\}^T M \{U\}}{M_n}$

$$y_1(t=0) = \frac{1}{315.5 \cdot 10^3} \{1.0 \quad 0.644 \quad 0.3\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix} 10^{-3} = 10.97 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$y_2(t=0) = \frac{1}{430 \cdot 10^3} \{1.0 \quad -0.601 \quad -0.676\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix} 10^{-3} = -1.25 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$y_3(t=0) = \frac{1}{4047 \cdot 10^3} \{1.0 \quad -2.57 \quad 2.47\} \begin{bmatrix} 175 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 263 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 350 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix} 10^{-3} = 0.33 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$y_i(t) = y_i(t=0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{y}_i(t=0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t)$$

Les solutions seront alors (avec $\dot{y}_i(t=0)=0$)

$$y_i(t) = y_i(t=0) \cos(\omega_i t)$$

$$\begin{cases} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{cases} = \begin{cases} 10.97 \cos(\omega_1 t) \\ -1.25 \cos(\omega_2 t) \\ 0.33 \cos(\omega_3 t) \end{cases} 10^{-3}$$

On : à $t=1$ s.

$$\begin{cases} y_1(1) \\ y_2(1) \\ y_3(1) \end{cases} = \begin{cases} 10.97 \cos(14.5 \times 1) \\ -1.25 \cos(31.1 \times 1) \\ 0.33 \cos(46.1 \times 1) \end{cases} 10^{-3} = \begin{cases} -3.89 \\ -1.19 \\ -0.17 \end{cases} 10^{-3}$$

Le déplacement à $t=1$ s , sera

$$U = \Phi Y \quad \begin{cases} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_3(1) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix} \begin{cases} -3.89 \\ -1.19 \\ -0.17 \end{cases} 10^{-3}$$

$$\begin{cases} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_3(1) \end{cases} = \begin{cases} -5.25 \\ -1.35 \\ -0.78 \end{cases} \text{ (mm)}$$

Résumé de la méthode de superposition modale

1. Calcul des matrices K, C et M et du vecteur force extérieure.

$$\text{Equation du mouvement } \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}(t)$$

2. Calcul des fréquences et modes propres de vibration

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\{\boldsymbol{\phi}\} = \mathbf{0} \quad \text{avec } |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

3. Calcul de la masse et du chargement généralisés pour le découplage

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \quad \text{et} \quad P_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{p}(t)$$

4. Equations découplées

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

5. Calcul des réponses modales au chargement imposé

❖ Calcul de $y_i(t)$ pour chaque mode (1SDDL : Duhamel, Harmonique,...) (Chap 6)

$$y_i(t) = \frac{1}{\omega_{ai}} (\dot{y}_i \tau_1 + \xi_i \omega_i y_i \tau_1) e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau_1)} \sin \omega_{ai} (t - \tau_1) + (y_i \tau_1) e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau_1)} \cos \omega_i (t - \tau_1) + \frac{1}{M_i \omega_{ai}} \int_{\tau_1}^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau)} \sin(\omega_{ai} (t - \tau)) d\tau$$

❖ CI : $\mathbf{U}(0)$ et $\dot{\mathbf{U}}(0)$ connues. Il faut calculer $y_i(0)$ et $\dot{y}_i(0)$

$$\mathbf{y}_i = \frac{\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \mathbf{M} \{\mathbf{U}\}}{M_i} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \frac{\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \mathbf{M} \{\dot{\mathbf{U}}\}}{M_i}$$

❖ Pour des CI nulles :

$$y_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{ai}} \int_{\tau_1}^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau)} \sin(\omega_{ai} (t - \tau)) d\tau$$

6. Réponse en coordonnées géométriques.

$$\{U\} = [\Phi] \{Y\} \text{ Soit } \{U\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \dots + \{\phi_i\}y_i + \dots + \{\phi_n\}y_n$$

7. Calcul des déplacements maximums

❖ Détermination des déplacements maximum généralisés Y_{\max}
A partir des solutions $y_i(t)$, déterminer pour chaque mode y_{imax}

❖ Méthode AVS : $u_{imax} = |\phi_{i1}y_{1max}| + |\phi_{i2}y_{2max}| + \dots + |\phi_{ii}y_{imax}| + \dots + |\phi_{in}y_{nmax}|$

❖ Méthode SRSS :

$$u_{imax} = \sqrt{(\phi_{i1}y_{1max})^2 + (\phi_{i2}y_{2max})^2 + \dots + (\phi_{ii}y_{imax})^2 + \dots + (\phi_{in}y_{nmax})^2}$$

8. Calcul des forces élastiques

❖ Soit $F_s = K U = K \Phi Y$

$$\{F_s\} = K\{\phi_1\}y_1 + K\{\phi_2\}y_2 + \dots + K\{\phi_n\}y_n$$

❖ Ou bien : $F_s = K U = K \Phi Y = \omega_i^2 M \Phi Y$

$$\{F_s\} = \omega_1^2 M\{\phi_1\}y_1 + \omega_1^2 M\{\phi_2\}y_2 + \dots + \omega_n^2 M\{\phi_n\}y_n$$

3. Méthode Pas-à-Pas

i. Introduction

- ❖ Plus utilisée pour les systèmes non linéaires. La non linéarité est transformée en systèmes linéaires successifs sur des petits intervalles de temps
- ❖ Appliquée directement sur les équations couplées.
- ❖ L'historique de la réponse est divisé en courts incréments de temps
- ❖ La réponse dans chaque incrément est calculée pour un système linéaire ayant les caractéristiques du début de l'intervalle.
- ❖ A la fin de l'intervalle les caractéristiques sont modifiées.
- ❖ Peut aussi être utilisée pour les systèmes linéaires. Pas besoin de calculer les fréquences et modes propres de vibration.
- ❖ Existe un problème avec la matrice « C ». Ne peut pas être définie par les facteurs d'amortissement modaux. Elle doit être définie explicitement.



ii. Equations de mouvement incrémentales

Sous forme incrémentale :

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta P(t) \quad (11.23)$$

Avec

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{U}_i &= \ddot{U}(t_i + \tau) - \ddot{U}(t_i) \\ \Delta \dot{U}_i &= \dot{U}(t_i + \tau) - \dot{U}(t_i) \\ \Delta U_i &= U(t_i + \tau) - U(t_i) \\ \Delta P_i &= P(t_i + \tau) - P(t_i) \end{aligned} \quad (11.24)$$

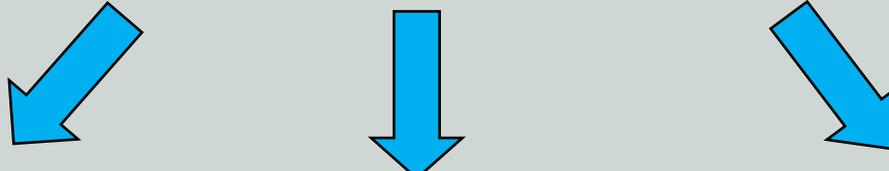
« τ » dépend de la méthode utilisée.
 $\tau = \Delta t$ pour Newmark- β et accélération linéaire
 $\tau = \theta \Delta t$ pour Wilson- θ

En cas de non linéarité.

- $K(U)$ et $C(\dot{U})$ dans le temps (d'un intervalle à un autre) et sont obtenus pour chaque intervalle de temps, les tangentes au début de l'intervalle.
- M est supposée rester constante dans le temps

ii. Equations de mouvement incrémentales

Méthodes de résolution Pas-à-Pas



Méthode d'accélération linéaire.

- ❖ Suppose une variation linéaire de l'accélération, donc variation quadratique de la vitesse et cubique du déplacement dans Δt .
- ❖ Méthode que conditionnellement stable.
- ❖ Pour diverger pour de mauvais choix de Δt

Méthode de Newmark- β .

- ❖ Généralisation de l'accélération linéaire
- ❖ Utilise 02 facteurs (β et γ) dans le calcul de $\Delta \ddot{u}_i$
- ❖ Bon choix de β . Newmark propose $1/6 \leq \beta \leq 1/2$
- ❖ $\beta=1/6$: Méthode d'accélération linéaire (que conditionnellement stable)
- ❖ $\beta=1/4$: Vitesse linéaire, d'où accélération moyenne dans Δt . Inconditionnellement stable

Méthode de Wilson- θ .

- ❖ Accélération linéaire sur l'intervalle de temps $\theta \Delta t$
- ❖ Pour une stabilité numérique optimal et une précision $\theta \geq 1.38$
- ❖ Méthode inconditionnellement stable.

iii. Méthode de Wilson- θ

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta P(t)$$

Accélération linéaire sur l'intervalle « $\theta \Delta t$ »

$$\ddot{U}(t) = \ddot{U}(t_i) + \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\tau} (t - t_i) \quad (11.25)$$

Avec $\Delta \ddot{U}_i = \ddot{U}(t_i + \tau) - \ddot{U}(t_i)$

En intégrant (11.25) deux fois entre t_i et t , on aura:

Vitesse
$$\dot{U}(t) = \dot{U}_i + \ddot{U}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\tau} (t - t_i)^2 \quad (11.26)$$

Déplacement
$$U(t) = U_i + \dot{U}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \ddot{U}_i(t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\tau} (t - t_i)^3 \quad (11.27)$$

A la fin de l'intervalle, on évalue (11.26) et (11.27)

$$\Delta \dot{U}_i = \ddot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \Delta \ddot{U}_i \tau \quad (11.28)$$

$$\Delta U_i = \dot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \tau^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{U}_i \tau^2 \quad (11.29)$$

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta P(t)$$

$$\Delta \dot{U}_i = \ddot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \Delta \ddot{U}_i \tau \quad (11.28)$$

$$\Delta U_i = \dot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \tau^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{U}_i \tau^2 \quad (11.29)$$

iii. Méthode de Wilson-θ

De l'équation (11.29), on tire :

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3\ddot{U}_i \quad (11.30)$$

(11.30) dans (11.28) :

$$\Delta \dot{U}_i = \frac{3}{\tau} \Delta U_i - 3\dot{U}_i - \frac{\tau}{2} \ddot{U}_i \quad (11.31)$$

Remplaçant (11.30) dans (11.31) dans l'équation du mouvement (11.23), on obtient :

Systeme d'équations linéaires $\bar{K}_i \Delta U_i = \bar{\Delta P}_i \quad (11.32)$

Avec :

$$\bar{K}_i = K_i + \frac{6}{\tau^2} M + \frac{3}{\tau} C_i \quad (11.33)$$

$$\bar{\Delta P}_i = \Delta P_i + M \left(\frac{6}{\tau} \dot{U}_i + 3\ddot{U}_i \right) + C_i \left(3\dot{U}_i + \frac{\tau}{2} \ddot{U}_i \right) \quad (11.34)$$

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta P(t) \quad \Delta \dot{U}_i = \ddot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \Delta \ddot{U}_i \tau \quad \Delta U_i = \dot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \tau^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{U}_i \tau^2$$

iii. Méthode de Wilson-θ

Résolution du système obtenu (11.32) donne ΔU_i

En remplaçant ΔU_i dans (11.30), on obtient $\Delta \ddot{U}_i$ mais dans l'intervalle $\theta \Delta t$. Il faut l'extrapoler sur l'intervalle « Δt » seulement. Soit :

$$\bar{\Delta \ddot{U}}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta} \quad (11.35)$$

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3 \ddot{U}_i \quad (11.30)$$

$$\Delta \dot{U}_i = \frac{3}{\tau} \Delta U_i - 3 \dot{U}_i - \frac{\tau}{2} \ddot{U}_i \quad (11.31)$$

Pour calculer ΔU_i et $\Delta \dot{U}_i$ sur l'intervalle « Δt » seulement, dans les équations (11.28) et (11.28) remplacer « τ » par « Δt ». Soit :

$$\Delta \dot{U}_i = \ddot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta \ddot{U}}_i \Delta t \quad (11.36)$$

$$\Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta \ddot{U}}_i \Delta t^2 \quad (11.37)$$

Finalement, on peut calculer à la fin de l'intervalle normal:

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i \quad (11.38)$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i \quad (11.39)$$

Enfin, l'accélération calculée de l'équation du mouvement au temps $(t_{i+1} = t_i + \Delta t_i)$

$$\ddot{U}_{i+1} = M^{-1} [P_{i+1} - F_a(\dot{U}_{i+1}) - K_k(U_{i+1})] \quad (11.40)$$

Et ainsi de suite

Algorithme de la Méthode de Wilson- θ

A. Initialisation

1. Calcul des matrices K , C et M et du vecteur force extérieure.

2. Poser les CI : U_0 , \dot{U}_0 et P_0

3. Calculer l'accélération initiale \ddot{U}_0

$$\ddot{U}_0 = M^{-1}[P_0 - C\dot{U}_0 - KU_0]$$

4. Choisir un pas de temps « Δt » et « θ » (Généralement $\theta = 1.4$) et calculer les coefficients suivants:

$$\tau = \theta \Delta t; \quad a_1 = \frac{3}{\tau}; \quad a_2 = \frac{6}{\tau}; \quad a_3 = \frac{\tau}{2}; \quad a_4 = \frac{6}{\tau^2};$$

5. Calculer la matrice de rigidité effective (11.33)

$$\bar{K}_i = K_i + a_4 M + a_1 C_i$$

B. Pour chaque pas de temps

1. Calculer par interpolation linéaire la charge « ΔP_i » pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\Delta P_i = P_{i+1} + (P_{i+2} - P_{i+1})(\theta - 1) - P_i$$

2. Calculer la charge effective incrémentale « $\overline{\Delta P}_i$ » (11.34) pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\overline{\Delta P}_i = \Delta P_i + M(a_2 \dot{U} + 3\ddot{U}_i) + Ci(3\dot{U}_i + a_3 \ddot{U}_i)$$

3. Résolution du système d'équations linéaires pour calculer ΔU_i (11.32)

$$\bar{K}_i \Delta U_i = \overline{\Delta P}_i$$

4. Calculer l'accélération incrémentale sur l'intervalle « $\theta \Delta t$ » (11.30)

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3\ddot{U}_i$$

5. Transformer l'incrément d'accélération sur l'intervalle « Δt » (11.35)

$$\bar{\Delta} \ddot{U}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta}$$

6. Calculer l'incrément de vitesse « $\Delta \dot{U}_i$ » (11.36) et l'incrément de déplacement « ΔU_i » (11.37)

$$\Delta \dot{U}_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t$$

$$\Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2$$

7. Calculer le déplacement et la vitesse au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ » (11.38) et (11.39)

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

8. Calculer l'accélération au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ » (11.40)

$$\ddot{U}_{i+1} = M^{-1} [P_{i+1} - F_a(\dot{U}_{i+1}) - K_k(U_{i+1})]$$

iv. Méthode de Newmark- β

Extension de la méthode de l'accélération linéaire, en utilisant 02 constantes.

En partant de l'accélération linéaire, on a trouvé (11.36) et (11.37):

$$\Delta \dot{U}_i = \ddot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t \quad \Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2$$

Modification de Newmark- β : remplacer au niveau de « $\bar{\Delta} \ddot{U}_i$ » (1/2) par « γ » et (1/6) par « β »

$$\Delta \dot{U}_i = \dot{U}_i \Delta t + \gamma \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t \quad (11.41) \quad \Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \beta \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2 \quad (11.42)$$

Généralement pour un « $\gamma \neq 1/2$ », la méthode introduit un amortissement superflu dans le système. Ceci nous amène apprendre « $\gamma = 1/2$ ».

$\bar{\Delta} \ddot{U}_i$ de (11.42) et la remplacer dans (11.41) nous donne:

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta U_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{U}_i \quad (11.43)$$

$$\Delta \dot{U}_i = \frac{1}{2\beta \Delta t} \Delta U_i - \frac{1}{2\beta} \dot{U}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \Delta t \ddot{U}_i \quad (11.44)$$

iv. Méthode de Newmark- β

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta U_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{U}_i \quad (11.43)$$

$$\Delta \dot{U}_i = \frac{1}{2\beta \Delta t} \Delta U_i - \frac{1}{2\beta} \dot{U}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \Delta t \ddot{U}_i \quad (11.44)$$

Remplaçant (11.43) et (11.44) dans l'équation du mouvement, on obtient:

$$M \Delta \ddot{U}_i + C_i \Delta \dot{U}_i + K_i \Delta U_i = \Delta P_i(t)$$

En remplaçant, on aboutira à un système d'équations linéaires:

$$\bar{K}_i \Delta U_i = \bar{\Delta P}_i$$

Avec:

$$\bar{K}_i = K_i + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{1}{\beta \Delta t} C_i \quad (11.45)$$

$$\bar{\Delta P}_i = \Delta P_i + M \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{U}_i + \frac{1}{2\beta} \ddot{U}_i \right) + C_i \left(\frac{1}{2\beta} \dot{U}_i - \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \Delta t \ddot{U}_i \right) \quad (11.46)$$

- ❖ Bon choix de β . Newmark propose $1/6 \leq \beta \leq 1/2$
- ❖ $\beta=1/6$: Méthode d'accélération linéaire (que conditionnellement stable)
- ❖ $\beta=1/4$: Vitesse linéaire, d'où accélération moyenne dans Δt . Inconditionnellement stable

Merci. Fin du chapitre 11

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Partie 2 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chap. 12

Analyse Spectrale des SPDD