

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Chap. 10

Partie 2 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Méthodes numériques de calcul des systèmes propres

1. Introduction (Rappel du problème propre)

- **Négliger l'amortissement**
- **Force extérieure nulle**
- **Structure idéale (Théorique). Elle vibre indéfiniment.**
- **En réalité, toute structure a un système de frottement pour l'amortir dans le temps.**
- **Vibration qui dépend de la distribution des masses, de la loi charge-déplacement et de la manière dont la vibration est produite initialement.**
- **On peut imposer des CI non nulles de tel sorte à faire vibrer la structure selon un quelconque mode normal.**
- **Dans chaque mode normal, propre ou naturel, chaque point de la structure exécute un mouvement sinusoïdale autour de sa position d'équilibre.**
- **Tous les points passent simultanément par une position d'équilibre et par leur amplitude maximale.**
- **La fréquence de vibration est donc la même pour tous les points de la structure (fréquence propre au mode considéré)**



Introduction

- Lorsque tous les points atteignent leur maximum, la déformée caractérise un mode normal de vibration.
- La fréquence la plus petite est appelée fréquence fondamentale.
- En théorie, les problèmes seront résolus en considérant le principe de superposition des modes normaux.
- Les modes normaux sont la base de la résolution des systèmes forcés.
- Le nombre de mode propre sera égale au nombre total des DDL.

Ainsi, le mouvement libre non amorti n'est utile que pour la détermination des caractéristiques propres du système:

Pulsations et modes propres de vibration



Nécessaires pour le calcul des réponses dynamiques

Pour les petits systèmes (3 à 4 DDL)

- ❖ Méthode de la matrice de rigidité
- ❖ Méthode de la matrice de flexibilité

Pour les grands systèmes

- ❖ Méthodes numériques

2. Généralités sur le calcul des valeurs et vecteurs propres

Rappel : Eq., de mouvement d'un SPDDL (8.12)

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)$$

Pour les mouvements libre non amorti, on aura:

$$M \ddot{U} + K U = 0 \quad (10.1)$$

Avec

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \ddot{U} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}_{(nx1)} \quad U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}_{(nx1)}$$

$$M \ddot{U} + K U = 0$$

Une solution particulière de ce système est (**voir les S1DDL**) :

$$U = \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = \phi_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \quad (10.2)$$

D'où:

$$\ddot{U} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \quad (10.3)$$

$$M \ddot{U} + K U = 0$$

$$U = \begin{cases} u_1(t) = \phi_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ u_2(t) = \phi_2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ u_n(t) = \phi_n \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \ddot{U} = \begin{cases} \ddot{u}_1(t) = -\phi_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_2(t) = -\phi_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) = -\phi_i \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) = -\phi_n \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

En remplaçant (10.2) et (10.3) dans (10.1), on aura:

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_{11} - m_1 \omega^2) \phi_1 + k_{12} \phi_2 + \dots + k_{1n} \phi_n = 0 \\ k_{21} \phi_1 + (k_{22} - m_2 \omega^2) \phi_2 + \dots + k_{2n} \phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1} \phi_1 + k_{i2} \phi_2 + \dots + (k_{ii} - m_i \omega^2) \phi_i + \dots + k_{in} \phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1} \phi_1 + k_{n2} \phi_2 + \dots + (k_{nn} - m_n \omega^2) \phi_n = 0 \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Sous forme matricielle: $(K - \omega^2 M) \{\phi\} = 0$ (10.5)

En posant « $\lambda = \omega_i^2$ », (10.5) s'écrit :

$$(K - \lambda M) \{\phi\} = 0 \quad (10.6)$$

Ou bien : $(K) \{\phi\} = \lambda M \{\phi\}$ (10.7)

L'équation (10.6) (ou 10.7) est celle d'un problème généralisé de valeurs et vecteurs propres

Si $[M] = I$ On aura $(K)\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$ (10.8)

$[M]$: Matrice masse.

I : Matrice identité (diagonale)

L'équation (10.8) est celle d'un problème propre standard

Très connue en pratique : analyse de la stabilité (charges critiques) des structures, problèmes de transfert de chaleur...

Comme. $\{\phi\} \neq 0$, il en résulte que le système aura une solution non trivial si :

$$\det|K - \lambda M| = p(\lambda) = 0 \quad (10.9)$$

$$\det|K - \omega^2 M| = 0$$

$p(\lambda) = 0$ appelée équation caractéristique, polynôme de degré « n ».
« n » solutions « $\lambda_i = \omega_i$ » appelées **pulsations propres**.

Et $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ **fréquences propres**

Soit:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_n \quad (10.10)$$

Ou:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n \quad (10.11)$$

La plus petite « ω_1 » est appelée **pulsation fondamentale**.

Et « $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ » est appelée **fréquence fondamentale**.

A chaque valeur propre « λ_i » correspond une matrice singulière

$$|K - \lambda_i M|$$

Et donc, un vecteur propre « $\{\phi_i\}$ » solution de l'équation (10.5)

$$(K - \lambda_i M)\{\phi_i\} = 0$$

$$(K - \omega^2 M)\{\phi\} = 0$$

En remplaçant chaque valeur de « ω_i » dans (10.5), on trouvera un vecteur $\{\phi_i\}$ définissant une **forme** de d'oscillation.

Le couple « $\omega_i, \{\phi_i\}$ » est appelé **mode propre ou normal** de vibration.

Ainsi pour « ω_i », on aura:

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_{11} - m_1\omega_i^2)\phi_1 + k_{12}\phi_2 + \dots + k_{1n}\phi_n = 0 \\ k_{21}\phi_1 + (k_{22} - m_2\omega_i^2)\phi_2 + \dots + k_{2n}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{i1}\phi_1 + k_{i2}\phi_2 + \dots + (k_{ii} - m_i\omega_i^2)\phi_i + \dots + k_{in}\phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\phi_1 + k_{n2}\phi_2 + \dots + (k_{nn} - m_n\omega_i^2)\phi_n = 0 \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

Puisque le déterminant (10.9) est nul, $\det|K - \omega^2 M| = 0$, il s'en suit que le système (10.12) admet seulement « n-1 » équations actives (Une des équations ne rapport rien).

Dans ce cas, $\{\phi_i\}$ ne peut être déterminé que sous forme de rapport.

Exemple, on suppose que $\phi_{i1} = 1$ et on calcule les autres composantes en fonction de ϕ_{i1} .

Généralement, on choisit la plus grande valeur des composantes de $\{\phi_i\}$ et on exprime les autres composantes par rapport à cette valeur.

$$\phi_{k,i} = \frac{\phi_k^{(i)}}{\phi_{max}^{(i)}}$$

Ainsi la solution générale du système (10.5) sera:

$$U = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (10.13)$$

φ_i sont déterminées par les conditions initiales et $\{\phi_i\}$ sont définies à un multiplicateur près.

A la fin, on obtient 02 matrices (objectif du mouvement libre non amorti)

Matrice spectrale

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

(10.14)

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1i} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2i} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \dots & \phi_{ii} & \dots & \phi_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{ni} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

(10.15)

On peut considérer uniquement « p » solutions ($p \leq n$)

On peut écrire : $[K][\Phi] = [K][\Phi] [\Omega]$ (10.16)

$[\Phi]$: matrice ($n \times p$) de colonnes p vecteurs propres

$[\Omega]$: matrice diagonale ($p \times p$) de valeurs propres

Rems :

- ✓ Si $[M]$ et $[K]$ sont symétriques $\rightarrow [\Omega]$ et $[\Phi]$ sont réels
- ✓ Si $[M]$ et $[K]$ sont définies positives $\rightarrow \lambda_i > 0$
- ✓ Si $[M]$ et $[K]$ sont semi-définies positives $\rightarrow \lambda_i \geq 0$, le nbr de valeurs nulles est égal au nbr de modes rigides du système
- ✓ Si $[M]$ et $[K]$ sont non définies positives $\rightarrow \lambda_i$ peuvent être négatives (cas de la stabilité)

3. Quelques propriétés des systèmes propres

Comprendre les propriétés des systèmes propres permet d'assimiler les méthodes qui permettent leur résolution.

Les algorithmes utilisés généralement sont basés sur certaines de ces propriétés.

i. Propriétés des vecteurs propres

1. P1 : Algorithmes linéaires

On a « n » solutions : « $\lambda_i, \{\phi_i\}$ » Vérifiant $(K)\{\phi_i\} = \lambda_i M\{\phi_i\}$

On peut poser : $\lambda_i M\{\phi_i\} = R$ et $\{\phi_i\} = U$, on aura

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (10.17)$$

D'où, on peut utiliser des algorithmes de résolution des système linéaires pour déterminer un vecteur propre.



Quelques propriétés des systèmes propres

2. P2 : Multiplication par un scalaire

Un vecteur multiple d'un vecteur propre est aussi un vecteur propre

Si on multiplie par « α »

$$(K)\{\phi_i\} = \lambda_i M\{\phi_i\}$$

On aura

$$(K)(\alpha\{\phi_i\}) = \lambda_i M(\alpha\{\phi_i\}) \quad (10.18)$$

On retrouve: les composantes des vecteurs propres ne sont connues que sous forme de rapports et que les amplitudes sont inconnues.

Un vecteur propre fournit une direction dans l'espace vectoriel d'ordre « n ».

On peut normaliser ses composantes de plusieurs manières. La plus pratique est par rapport à la masse $[M]$

3. P3 : Normalisation des modes propres

Cette normalisation par rapport à la masse se fera en calculant :

$$\widehat{M}_i = \{\phi_i\}^T M \{\phi_i\} \quad (\text{Scalaire}) \quad (10.19)$$

On normalise par la suite chaque mode, en calculant :

$$\widehat{\phi}_i = \frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{\widehat{M}_i}} \quad (10.20)$$

Avec cette M-normalisation, on peut vérifier que:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = I \quad (10.21)$$

Avec:

$[M]$: Matrice masse.

$[\Phi]$: Matrice spectrale (constituée des modes propres).

I : Matrice identité (diagonale)

Quelques propriétés des systèmes propres

Les modes propres sont calculés par rapport à une valeur choisie. Cette valeur peut être choisie de plusieurs façon:

- Déplacement d'un nœud particulier (qlq) égal à 1 dans tous les modes.
- Le plus grand déplacement d'un nœud dans le mode considéré égal à 1.
- Les modes propres normalisés par rapport aux matrices K ou M .

Même avec la normalisation, le sens du vecteur reste inconnu. Il est défini seulement selon un multiple de « -1 ».

C'est cette dernière qui est intéressante et la plus utilisée dans les logiciels et le plus souvent la normalisation est prise par rapport à la masse.

$$\{\phi_i\}^T K \{\phi_i\} = 1 \quad (10.22)$$

Ou bien $\{\phi_i\}^T M \{\phi_i\} = 1$

4. P4 : Orthogonalité des modes propres

Déjà démontré au chapitre (9)

On dit que les modes sont **M-Orthogonaux**

$$\{\phi_i\}^T M \{\phi_j\} = 0 \quad (\text{pour } i \neq j) \quad (10.23)$$

On dit que les modes sont **K-Orthogonaux**

$$\{\phi_i\}^T K \{\phi_j\} = 0 \quad (\text{pour } i \neq j) \quad (10.24)$$

Si on a l'orthogonalité et la normalité des vecteurs propres (par rapport à la masse, on peut écrire:

$$\{\phi_i\}^T M \{\phi_j\} = \delta_{ij} \quad (10.25)$$

Avec δ_{ij} Kronecker, les vecteurs sont alors **M-orthonormés**

Et par rapport à K, on aura :

$$\{\phi_i\}^T K \{\phi_j\} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (10.26)$$

ii. Propriétés polynomiales des problèmes propres

1. P1 : Propriété de séparation des valeurs propres

Valeurs propres, racines du polynôme : (10.9)

$$p(\lambda) = \det|K - \lambda M| = 0$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ les solutions du système initial

En supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de $[K]$ et $[M]$, on obtient :

$$[K]^{-1}\{X\} = l [M]^{-1}\{X\} \quad (10.27)$$

Avec $l_1, l_2, l_3 \dots, l_i, \dots, l_{n-1}$ les « n-1 » solutions du système réduit (10.27)

La séparation ?

La séparation des valeurs propres s'écrit:

$$\lambda_1 \leq l_1 \leq \lambda_2 \leq l_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq l_{n-1} \leq \lambda_n \quad (10.28)$$

Plus généralement, si on supprime les « r » dernières lignes et colonnes, on aura : (avec $p^r(\lambda)$ le polynôme caractéristique)

Les racines de $p^{r+1}(l)$ séparent les racines de $p^r(\lambda)$, c'est-à-dire:

$$\lambda_1 \leq l_1 \leq \lambda_2 \leq l_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-r-1} \leq l_{n-r-1} \leq \lambda_{n-r} \quad (10.29)$$

La suite du polynôme $p^r(\lambda)$ constitue une suite de **STURM**

2. P2 : Réduction de l'intervalle autour de la valeur propre recherchée

On décompose la matrice $[K] - \mu[M]$ en $[L][D][L]^T$

μ : Un réel quelconque

Le nbr de termes **négatifs** dans $[D]$ est égal au nbr de **valeurs propres** du système **inférieures** à « μ »

Si « μ » est une valeur propre, la matrice $[K] - \mu[M]$ est singulière i.e $\det p(\mu)=0$ et donc $[D]$ contient au moins un terme nul.

Utiliser souvent pour déterminer des valeurs propres ?

On suppose une valeur de « μ » et en testant si « μ » est plus grand ou plus petit que la valeur désirée, on réduira alors l'intervalle dans lequel se trouve cette valeur propre.

$$[K] - \mu[M] \text{ en } [L][D][L]^T$$

Exemple 1(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivante. On veut estimer la valeur « λ_2 » en utilisant le « shifting ». On définira l'intervalle autour de la valeur « λ_2 »

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- i) Cas 1 : Prendre $\mu = 1$
- ii) Cas 2 : Prendre $\mu = 8$
- iii) Cas 3 : Prendre $\mu = 5$
- iv) Cas 4 : Prendre $\mu = 3$

i) Cas 1 : $\mu = 1$

$$[K] - \mu[M] = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } [L][D][L]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -3/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zéro éléments négatifs en D, d'où aucun élément n'est inférieur à « $\mu = 1$ »

D'où : λ_1 (ainsi que λ_2 et λ_3) $> \mu = 1$

Quelques propriétés des systèmes propres Réduction de l'intervalle autour de la valeur propre recherchée

ii) Cas 2: $\mu = 8$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[K] - \mu[M] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[L][D][L]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & -12/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

03 éléments négatifs en D, d'où les 03 sont inférieures à « $\mu = 8$ »

D'où : λ_3 (ainsi que λ_1 et λ_2) $< \mu = 8$

On choisira donc « μ » entre « $\mu = 1$ » et « $\mu = 8$ »

iii) Cas 3: $\mu = 5$

$$[K] - \mu[M] = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$[L][D][L]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

02 éléments négatifs en D, d'où les 02 premières sont inférieures à « $\mu = 5$ »

D'où : λ_2 (ainsi que λ_1) $< \mu = 5$

Alors que : $\lambda_3 > \mu = 5$

Quelques propriétés des systèmes propres **Réduction de l'intervalle autour de la valeur propre recherchée**

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

iv) Cas 4: $\mu = 3$ **Rem: Si on cherche λ_3 on choisira « $5 < \mu < 8$ »**

$$[K] - \mu[M] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[L][D][L]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

01 élément négatif en D, d'où la première valeur propre est inférieure à « $\mu = 3$ »

D'où : $\lambda_1 < \mu = 3$, Mais $\lambda_2 > \mu = 3$

Ainsi, $3 < \lambda_2 < 5$

- ✓ On peut continuer au fur et à mesure en prenant une valeur de μ entre 3 et 5 pour encore réduire l'intervalle jusqu'à l'obtention de la valeur de λ_2
- ✓ Idem pour le calcul des valeurs de λ_1 et λ_3

Alors que : $5 < \lambda_3 < 8$

Et : $1 < \lambda_1 < 3$

iii. Décalage des valeurs propres ou « Shifting »

Appelé aussi « **Translation spectrale** » (Shifting)

Très utilisé dans les algorithmes de calcul des problèmes propres.
Pour accélérer la convergence et pour contourner certains cas particuliers

Si on veut décaler d'une valeur « ρ », la translation spectrale de $[K]$ s'exprime par calculer

$$[L] = [K] - \rho[M] \quad (10.30)$$

Et considérer le pb propre:

$$[L]\{\psi\} = \mu [M]\{\psi\} \quad (10.31)$$

(10.30) dans (10.31)

$$[K]\{\psi\} = (\rho + \mu) [M]\{\psi\} \quad (10.32)$$

$$[K]\{\psi\} = (\rho + \mu) [M]\{\psi\} \quad (10.32)$$

Par identification au système initial

$$(K)\{\phi_i\} = \lambda_i M\{\phi_i\}$$

et comme la solution du pb propre est unique, on déduit:

$$\{\phi_i\} = \{\psi_i\} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \rho + \mu_i \quad (10.33)$$

Les vecteurs propres de (10.30)

$$[L] = [K] - \rho[M]$$

Sont les mêmes que ceux initiaux, alors que les valeurs propres ont subi un décalage de « ρ » par rapport aux initiales

Très intéressant, pour le calcul des modes propres rigides (correspondants aux valeurs propres nulles).

Surtout pour les algorithmes qui ne calculent que les valeurs positives

iv. Transformation du problème propre généralisé en problème standard

Pb généralisé

$$[K]\{\phi\} = \lambda M\{\phi\} \quad (10.7)$$

Pb standard

$$[K]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

→
(10.8)

A reçu plus d'attention. Tout pb généralisé peut être transformé en pb standard

Multiplions (10.7) par $[K]^{-1}$ $[K]$ supposée non singulière

$$[K]^{-1} [K]\{\phi\} = \lambda [K]^{-1} [M]\{\phi\}$$

En divisant par « λ », on aura

$$[K]^{-1} [M]\{\phi\} = \frac{1}{\lambda} \{\phi\} \quad (10.34)$$

Résolution (10.34) donne des valeurs propres inverses que celles initiales et les mêmes vecteurs propres.

$$[K]^{-1}[M]\{\phi\} = \frac{1}{\lambda}\{\phi\} \quad (10.34)$$



$[K]^{-1}$ Difficile à avoir.

De plus $[K]^{-1}[M]$ n'est pas symétrique (Bien que $[K]$ et $[M]$ le sont)

Donc, on va stocker une matrice pleine !!!

Alternative ?

Décomposer $[K]$ en matrices triangulaires sup et inf. (Cholesky ou ou décomposition spectrale)

$$[K] = [S]^T[S] \quad (10.35)$$

L'équation généralisée sera:

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad \longrightarrow \quad [S]^T[S]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad (10.36)$$

Rem : Si on essayait décomposer $[M]$ au lieu de $[K]$ en matrices triangulaires sup et inf, ça donne généralement de mauvais résultats pour des matrices $[M]$ mal conditionnées. Donc on évite.

En multipliant (10.36) par $[s]^{-1T}$, on aura:

$$[s]^{-1T} [S]^T [S] \{\phi\} = \lambda [s]^{-1T} [M] \{\phi\}$$

$$[S] \{\phi\} = \lambda [s]^{-1T} [M] \{\phi\}$$

En posant, $\{\phi\} = [s]^{-1} \{\psi\}$ et $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ (10.37)

On arrive à la relation $\alpha \{\psi\} = [s]^{-1T} [M] [s]^{-1} \{\psi\}$

Ou bien: $[A] \{\psi\} = \alpha \{\psi\}$ Avec : $[A] = [s]^{-1T} [M] [s]^{-1}$ (10.38)

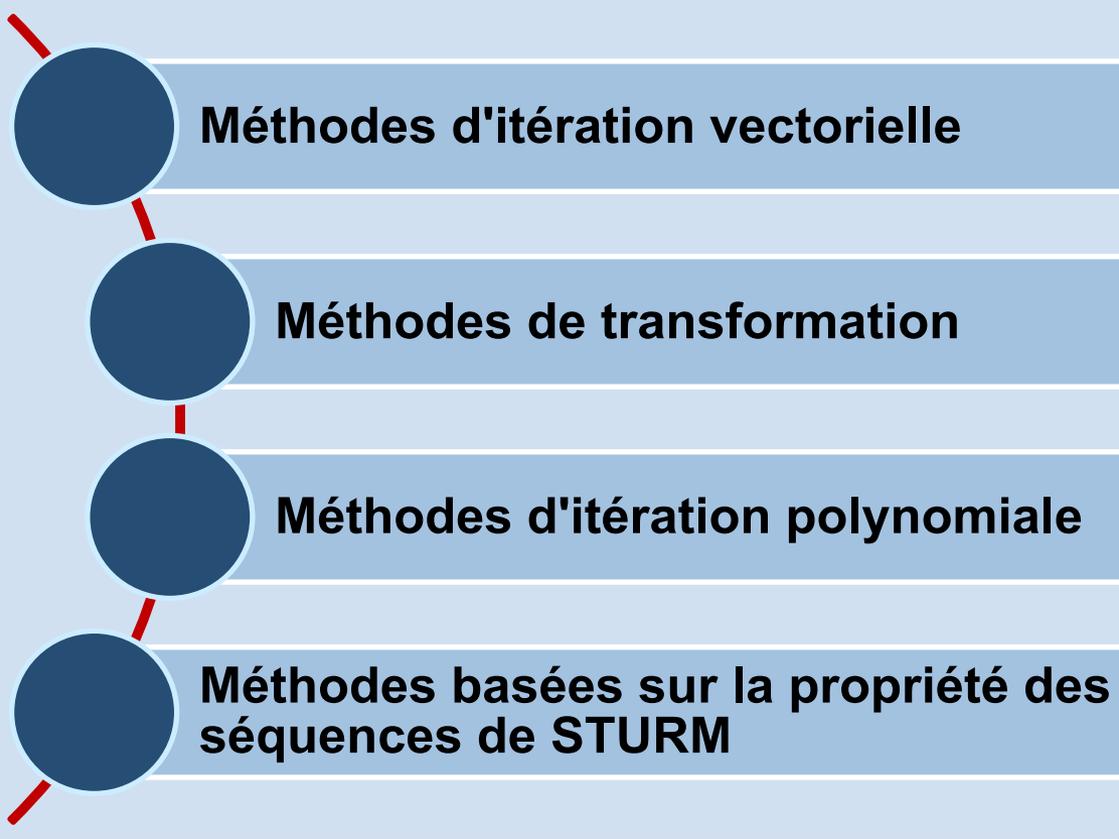
(10.38) pb standard avec $[A]$ matrice symétrique. On ne stocke que le triangle (sup ou inf)

Résolution de (10.38) donne α et $\{\psi\}$

Les valeurs initiales du système $[K] \{\phi\} = \lambda [M] \{\phi\}$ s'obtiennent par (10.37)

Méthodes numériques de résolution des systèmes propres

$n > 3$
 n
grand

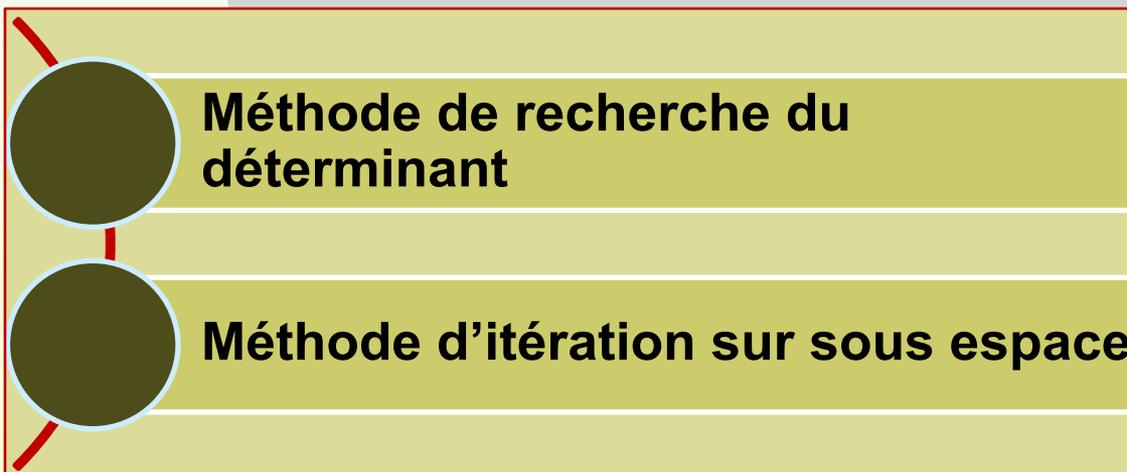


- ❖ Itération inverse
- ❖ Itération Directe
- ❖ Translation spectrale dans l'itération
- ❖ Itération avec quotient de Reyleigh

- ❖ Jacobi classique
- ❖ Jacobi généralisée
- ❖ Householder QR itération inverse

- ❖ Explicite
- ❖ Implicite

n très
grand



Comment choisir une méthode ?

Ça dépend :

- ✓ Type du problème (Généralisé ou standard)
- ✓ La nature de la solution voulue (valeur ou vecteur propre ou les 02)
- ✓ Du nombre des solutions voulues
- ✓ Des propriétés des matrices $[K]$ et $[M]$ (ordre de la matrice, bandée ou non, symétrique,...)
- ✓ Des moyens informatiques disponibles (taille mémoire, précision,...). Le cout du calcul en dépend et il se peut qu'un algorithme qui donne de bons résultats pour un pb spécifique soit inadéquat pour la solution d'un autre pb.

4. Méthodes de résolution des systèmes propres

i. Les méthodes d'itération vectorielle

On suppose des valeurs initiales de λ_1 et $\{\phi_1\}$ et on essaye de satisfaire l'équation initiale du pb propre

$$(K)\{\phi\} = \lambda M\{\phi\}$$

02 possibilités:

Itération inverse

On calcule le second membre $R_1 = \lambda_1 M\{\phi_1\}$ et on calcule $\{\phi_2\}$ en résolvant $(K)\{\phi_2\} = R_1$

On répète l'opération avec $\{\phi_2\}$ et ainsi de suite jusqu'à convergence

Itération directe

On calcule le premier membre $R_1 = K\{\phi_1\}$ et on calcule $\{\phi_2\}$ en résolvant $\lambda M\{\phi_2\} = R_1$

On répète l'opération avec $\{\phi_2\}$ et ainsi de suite jusqu'à convergence

1. Itération inverse

Valable pour les pbs généralisés lorsqu'on s'intéresse à un petit nbr de solutions propres.

$$[K]\{\phi\} = \lambda M\{\phi\}$$

$[K]$ définie (non singulière) et $[M]$ peut être semi-définie (même concentrée avec des termes nuls).

Si $[K]$ est singulière, on utilise une translation spectrale pour lever la singularité.

On suppose des valeurs initiales de λ_1 généralement ($=1$) et $\{X_1\}$ et on essaye de satisfaire l'équation initiale du pb propre et à itérer à chaque fois de sorte qu'à l'itération « k » ($k=1, 2, 3, \dots$) on ait à résoudre le système linéaire:

$$[K]\{\bar{X}_{k+1}\} = M\{X_k\} \quad (10.39)$$

Rem: $\{X_1\}$ ne doit pas être orthogonal à $\{\phi_1\}$ (i.e: $\{X_1\}^T M \{\phi_1\} \neq 0$)

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération inverse)

Pour éviter que $\bar{\mathbf{X}}_{k+1}$ croît ou décroît de façon importante (risque d'affecter la précision des résultats), on le normalise par rapport à la $[\mathbf{M}]$. Soit

$$\{\mathbf{X}_{k+1}\} = \frac{\{\bar{\mathbf{X}}_{k+1}\}}{(\{\bar{\mathbf{X}}_{k+1}\}^T [\mathbf{M}] \{\bar{\mathbf{X}}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \quad (10.40)$$

Equivaut à la normalité de $\{\mathbf{X}_{k+1}\}$

$$\{\mathbf{X}_{k+1}\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{X}_{k+1}\} = 1$$

Algorithme utilisé dans la majorité des logiciels, en améliorant la procédure.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération inverse)

Algorithme utilisé

Généralement on prend un **vecteur unité** comme début pour éviter l'orthogonalité avec $\{\phi_1\}$
 $\{\{X_1\}^T M \{\phi_1\} \neq 0$

On choisit une valeur de $\{X_1\}$ et $\lambda_1=1$

1) Soit. $\{Y_1\} = [M] \{X_1\}$ (10.41)

Pour chaque itération $k=1, 2, \dots$ on évalue

2) $(K)\{\bar{X}_{k+1}\} = \{Y_k\}$ (10.42)

3) $\{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\}$ (10.43)

4) $R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}$ (10.44)

(quotient de Rayleigh)

5) $\{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}}$ (10.45)

On itère plutôt sur $\{Y_k\}$

Quotient de Rayleigh = $\frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi}$ avec $\phi = \{\bar{X}_{k+1}\}$

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération inverse)

Rem: Si $\{X_1\}$ n'est pas M-orthogonal à $\{\phi_1\}$ (i.e: $\{Y_1\}^T \{\phi_1\} = \{X_1\}^T M \{\phi_1\} \neq 0$)

Alors : $\{Y_{k+1}\}$ tend vers $M \{\phi_1\}$

Et. $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_1 . qd k tend vers l'infini

02 avantages, en itérant sur $\{Y_k\}$ au lieu de $\{X_k\}$,

1. On économise la multiplication $M \{X_k\}$ dans les eqs (10.42) et (10.45)

2. Eq. (10.44) (quotient de Rayleigh) permet de calculer une approximation de la valeur propre λ_1 . ça va servir à tester la convergence de l'itération.

$$R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}$$

Posons: $\lambda_1^{k+1} = R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ (10.46)

On aura convergence qd : $\left| \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k}{\lambda_1^{k+1}} \right| \leq Tol$ (10.47)

Avec : $Tol \leq 10^{-2s}$ où. « 2s » chiffres significatifs exacts

Le vecteur propre aura « s » chiffres significatifs exacts

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération inverse)

Supposons que « l » est la dernière itération effectuée, on aura:

$$\lambda_1 \cong R(\{\bar{X}_{l+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{Y_l\}}{\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{\bar{Y}_{l+1}\}} \quad (10.48)$$

et

$$\{\phi_1\} = \frac{\{\bar{X}_{l+1}\}}{(\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{\bar{Y}_{l+1}\})^{\frac{1}{2}}}$$

(10.49)

$\{Y_{k+1}\}$ tend vers $M \{\phi_1\}$

$\{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\}$

$$\{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}}$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération inverse**

Exemple 2(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivantes.
Utiliser l'itération inverse pour calculer λ_1 et $\{\phi_1\}$. Utiliser une tolérance Tol= 10^{-6} (s=3).

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{Y_k\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

i) 1^{ère} Itération (k=1)

Choisir des valeurs initiales: $\{X_1\}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ et $\lambda_1=1$

$$1) \quad \{Y_1\} = [M] \{X_1\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{Y_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$2) \quad (K)\{\bar{X}_2\} = \{Y_1\} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$3) \quad \{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \quad \{\bar{Y}_2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{Y}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$4) \quad R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \quad R(\{\bar{X}_2\}) = \frac{\{\bar{X}_2\}^T \{Y_1\}}{\{\bar{X}_2\}^T \{\bar{Y}_2\}} = \frac{\{3 \ 6 \ 7 \ 8\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{3 \ 6 \ 7 \ 8\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}} = \frac{20}{136} = 0.1470588$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération inverse**

Exemple 2(*)

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{1}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Par itération

$$5) \{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \quad \{Y_2\} = \frac{\{\bar{Y}_2\}}{(\{\bar{X}_2\}^T \{\bar{Y}_2\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}{\left(\{3 \ 6 \ 7 \ 8\} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.02899 \\ 0 \\ 0.68599 \end{pmatrix}$$

ii) 2ème Itération (k=2)

$$2) (K)\{\bar{X}_3\} = \{Y_2\} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.02899 \\ 0 \\ 0.68599 \end{pmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{X}_3\} = \begin{pmatrix} 1.71499 \\ 3.42997 \\ 4.11597 \\ 4.80196 \end{pmatrix}$$

$$3) \{\bar{Y}_3\} = [M] \{\bar{X}_3\} \quad \{\bar{Y}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1.71499 \\ 3.42997 \\ 4.11597 \\ 4.80196 \end{pmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{Y}_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.85994 \\ 0 \\ 4.80196 \end{pmatrix}$$

$$4) R(\{\bar{X}_3\}) = \frac{\{\bar{X}_3\}^T \{Y_2\}}{\{\bar{X}_3\}^T \{\bar{Y}_3\}} = \frac{\{1.71499 \ 3.42997 \ 4.11597 \ 4.80196\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1.02899 \\ 0 \\ 0.68599 \end{pmatrix}}{\{1.71499 \ 3.42997 \ 4.11597 \ 4.80196\} \begin{pmatrix} 0 \\ 6.85994 \\ 0 \\ 4.80196 \end{pmatrix}} = 0.1464646$$

$$5) \{Y_3\} = \frac{\{\bar{Y}_3\}}{(\{\bar{X}_3\}^T \{\bar{Y}_3\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6.85994 \\ 0 \\ 4.80196 \end{pmatrix}}{\left(\{1.71499 \ 3.42997 \ 4.11597 \ 4.80196\} \begin{pmatrix} 0 \\ 6.85994 \\ 0 \\ 4.80196 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.00504 \\ 0 \\ 0.70353 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération inverse**

Exemple 2(*)

Après 02 itérations, on teste la convergence ?

$\{Y_{k+1}\}$ tend vers $M \{\phi_1\}$

Et $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_1 . qd k tend vers l'infini

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{1}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k}{\lambda_1^{k+1}} \right| \leq Tol ? \quad \left| \frac{R(\{\bar{X}_3\}) - R(\{\bar{X}_2\})}{R(\{\bar{X}_3\})} \right| = \left| \frac{0.1464646 - 0.1470588}{0.1464646} \right| = 0.0040567 > Tol ?$$

Il n'ya pas convergence. Il faut continuer avec d'autres itérations. La procédure est la même.

A la 5^{ème} itération, on a atteint la convergence. On aura:

Pour (k=5): $\{\bar{X}_6\} = \begin{pmatrix} 1.70715 \\ 3.41430 \\ 4.12130 \\ 4.82830 \end{pmatrix} \quad \{\bar{Y}_6\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.82860 \\ 0 \\ 4.82830 \end{pmatrix} \quad R(\{\bar{X}_6\}) = 0.1464466 \quad \{Y_6\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.00003 \\ 0 \\ 0.70709 \end{pmatrix}$

$$\left| \frac{R(\{\bar{X}_6\}) - R(\{\bar{X}_5\})}{R(\{\bar{X}_6\})} \right| = \left| \frac{0.1464466 - 0.1464466}{0.1464466} \right| = 0.000000103589 < Tol ?$$

A la convergence

$$\lambda_1 = 0.146447$$

$\{Y_{k+1}\}$ tend vers $M \{\phi_1\}$

$$\{\phi_1\} = \frac{\{\bar{Y}_{l+1}\}}{(\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{\bar{Y}_{l+1}\})^{\frac{1}{2}}}$$

Et $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_1 .
qd k tend vers l'infini

$$\{\phi_1\} = \frac{\{\bar{Y}_6\}}{(\{\bar{X}_6\}^T \{\bar{Y}_6\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{pmatrix} 1.70715 \\ 3.41430 \\ 4.12130 \\ 4.82830 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} 1.70715 & 3.41430 & 4.12130 & 4.82830 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6.82860 \\ 0 \\ 4.82830 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0.25001 \\ 0.50001 \\ 0.60355 \\ 0.70709 \end{pmatrix}$$

2. Itération directe

Complémentaire à l'itération inverse, elle détermine le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre.

$$(K)\{\phi\} = \lambda M\{\phi\}$$

C'est $[M]$ qui doit être définie (non singulière) sinon on utilise une translation spectrale pour lever la singularité.

On suppose des valeurs initiales de λ_1 généralement (=1) et $\{X_1\}$ et on essaye de satisfaire l'équation initiale du pb propre à itérer à chaque fois de sorte qu'à l'itération « k » (k=1, 2, 3, ...) on ait à résoudre le système linéaire:

$$(M)\{\bar{X}_{k+1}\} = K\{X_k\} \quad (10.50)$$

$$\{X_{k+1}\} = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T [M] \{\bar{X}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \quad (10.51)$$

Rem: $\{X_1\}$ ne doit pas être orthogonal à $\{\phi_n\}$ (i.e: $\{X_1\}^T M \{\phi_n\} \neq 0$)

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération directe)

Rem: Si $\{X_1\}$ n'est pas M-orthogonal à $\{\phi_n\}$

Alors : $\{X_{k+1}\} \longrightarrow \{\phi_n\}$ (ou bien $\{Y_{k+1}\}$ tend vers $K\{\phi_n\}$) qd $k \longrightarrow \infty$

Algorithme proposé

On choisit une valeur de $\{X_1\}$. $\lambda_1=1$

$$\text{Soit. } \{Y_1\} = [K] \{X_1\} \quad (10.52)$$

Pour chaque itération $k=1, 2, \dots$ on évalue

$$2) \quad (M)\{\bar{X}_{k+1}\} = \{Y_k\} \quad (10.53)$$

$$3) \quad \{\bar{Y}_{k+1}\} = [K] \{\bar{X}_{k+1}\} \quad (10.54)$$

$$4) \quad R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}} \quad (10.55)$$

$$5) \quad \{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\})^{\frac{1}{2}}} \quad (10.56)$$

Quotient de Rayleigh = $\frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi}$ avec $\phi = \{\bar{X}_{k+1}\}$

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération directe)

Rem: Si $\{\phi_n\}^T \{Y_1\} \neq 0$)

Alors : $\{Y_{k+1}\}$ tend vers $K \{\phi_n\}$

Et. $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_n . qd k tend vers l'infini

La convergence est évaluée de la même manière que celle de l'itération inverse

$$\left| \frac{\lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k}{\lambda_n^{k+1}} \right| \leq Tol \quad (10.57)$$

Supposons que « l » est la dernière itération effectuée, on aura:

et

$$\begin{aligned} \lambda_n &\cong R(\{\bar{X}_{l+1}\}) \\ &= \frac{\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{\bar{Y}_{l+1}\}}{\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{Y_l\}} \end{aligned} \quad (10.58)$$

$$\{\phi_n\} = \frac{\{\bar{X}_{l+1}\}}{(\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{Y_l\})^{\frac{1}{2}}} \quad (10.59)$$

$\{Y_{k+1}\}$ tend vers $K \{\phi_n\}$

$\{\bar{Y}_{k+1}\} = [K] \{\bar{X}_{k+1}\}$

$$\{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\})^{\frac{1}{2}}}$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération directe**

Exemple 3(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivantes.
Utiliser l'itération directe pour calculer λ_4 et $\{\phi_4\}$. Utiliser une tolérance Tol= 10^{-6} (s=3).

$$[K] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [K] \{X_1\} \\ (M)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [K] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

i) 1^{ère} Itération (k=1)

Choisir des valeurs initiales: $\{X_1\}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ et $\lambda_1=1$

$$1) \quad \{Y_1\} = [K] \{X_1\} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{Y_1\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$2) \quad (M)\{\bar{X}_2\} = \{Y_1\} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{X}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$3) \quad \{\bar{Y}_{k+1}\} = [K] \{\bar{X}_{k+1}\} \quad \{\bar{Y}_2\} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \text{D'où } \{\bar{Y}_2\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ -11 \\ 13.5 \end{Bmatrix}$$

$$4) \quad R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}} \quad R(\{\bar{X}_2\}) = \frac{\{\bar{X}_2\}^T \{\bar{Y}_2\}}{\{\bar{X}_2\}^T \{Y_1\}} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ -11 \\ 13.5 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}} = 5.93333$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération directe**

Exemple 3(*)

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [K] \{X_1\} \\ (M)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [K] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Par itération

$$5) \{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\})^{\frac{1}{2}}} \{Y_2\} = \frac{\{\bar{Y}_2\}}{(\{\bar{X}_2\}^T \{Y_1\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -11 \\ 13.5 \end{pmatrix}}{\left(\{1 \ 0.5 \ 1 \ 2\} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 2.1909 \\ -0.3652 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix}$$

ii) 2^{ème} Itération (k=2)

$$2) (M)\{\bar{X}_3\} = \{Y_2\} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}_3\} = \begin{pmatrix} 2.1909 \\ -0.3652 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix} \quad \text{D'où} \quad \{\bar{X}_3\} = \begin{pmatrix} 1.0955 \\ -0.1826 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix}$$

$$3) \{\bar{Y}_3\} = [K] \{\bar{X}_3\} \quad \{\bar{Y}_3\} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1.0955 \\ -0.1826 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix} \quad \text{D'où} \quad \{\bar{Y}_3\} = \begin{pmatrix} 2.1909 \\ 15.5188 \\ -41.9921 \\ 40.5315 \end{pmatrix}$$

$$4) R(\{\bar{X}_3\}) = \frac{\{\bar{X}_3\}^T \{\bar{Y}_3\}}{\{\bar{X}_3\}^T \{Y_2\}} = \frac{\{1.0955 \ -0.1826 \ -4.0166 \ 4.9295\} \begin{pmatrix} 2.1909 \\ 15.5188 \\ -41.9921 \\ 40.5315 \end{pmatrix}}{\{1.0955 \ -0.1826 \ -4.0166 \ 4.9295\} \begin{pmatrix} 2.1909 \\ -0.3652 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix}} = 8.57886$$

$$5) \{Y_3\} = \frac{\{\bar{Y}_3\}}{(\{\bar{X}_3\}^T \{Y_2\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{pmatrix} 2.1909 \\ 15.5188 \\ -41.9921 \\ 40.5315 \end{pmatrix}}{\left(\{1.0955 \ -0.1826 \ -4.0166 \ 4.9295\} \begin{pmatrix} 2.1909 \\ -0.3652 \\ -4.0166 \\ 4.9295 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0.3345 \\ 2.3694 \\ -6.4112 \\ 6.1882 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres **Itération directe**

Exemple 3(*)

Après 02 itérations, on teste la convergence ?

$$\{Y_{k+1}\} \text{ tend vers } K \{\phi_n\}$$

Et $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_n . qd k tend vers l'infini

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [K] \{X_1\} \\ (M)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [K] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\lambda_4^{k+1} - \lambda_4^k}{\lambda_4^{k+1}} \right| \leq Tol ? \quad \left| \frac{R(\{\bar{X}_3\}) - R(\{\bar{X}_2\})}{R(\{\bar{X}_3\})} \right| = \left| \frac{8.57886 - 5.93333}{8.57886} \right| = 0.3084 > Tol ?$$

Il n'ya pas convergence. Il faut continuer avec d'autres itérations. La procédure est la même.

A la 10^{ème} itération, on a atteint la convergence. On aura:

Pour (k=10): $\{\bar{X}_{11}\} = \begin{Bmatrix} -1.1416 \\ 2.7170 \\ -7.7476 \\ 5.9816 \end{Bmatrix}$ $\{\bar{Y}_{11}\} = \begin{Bmatrix} -24.3237 \\ 57.8405 \\ -82.4219 \\ 63.6157 \end{Bmatrix}$ $R(\{\bar{X}_{11}\}) = 10.63845$ $\{Y_{11}\} = \begin{Bmatrix} -2.2864 \\ 5.4369 \\ -7.7476 \\ 5.9898 \end{Bmatrix}$

$$\left| \frac{R(\{\bar{X}_{11}\}) - R(\{\bar{X}_{10}\})}{R(\{\bar{X}_{11}\})} \right| = \left| \frac{10.63845 - 10.63844}{10.63845} \right| = 0.0000009437 < Tol ?$$

A la convergence

$$\lambda_4 = 10.63845$$

$\{Y_{k+1}\}$ tend vers $K \{\phi_n\}$

$$\{\phi_n\} = \frac{\{\bar{X}_{l+1}\}}{(\{\bar{X}_{l+1}\}^T \{Y_l\})^{\frac{1}{2}}}$$

Et $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_n .
qd k tend vers l'infini

$$\{\phi_4\} = \frac{\{\bar{X}_{11}\}}{(\{\bar{X}_{11}\}^T \{Y_{10}\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{Bmatrix} -1.1416 \\ 2.7170 \\ -7.7476 \\ 5.9816 \end{Bmatrix}}{\left(\begin{Bmatrix} -1.1416 & 2.7170 & -7.7476 & 5.9816 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.2833 \\ 5.4340 \\ -7.7476 \\ 5.9816 \end{Bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{Bmatrix} -0.10731 \\ 0.25539 \\ -0.72827 \\ 0.56227 \end{Bmatrix}$$

3. Translation spectrale dans l'itération vectorielle

Pour des valeurs autres que « $\lambda_1, \{\phi_1\}$ » ou « $\lambda_n, \{\phi_n\}$ », on utilisera l'itération inverse avec translation spectrale proche de la valeur propre d'intérêt (avant de commencer les itérations, on se met dans la zone voulue)

On peut montrer que si « μ » est la valeur du décalage, la convergence se fera vers la valeur propre « λ_j » telle que:

$$|\lambda_j - \mu| < |\lambda_p - \mu|, \quad \forall p \neq j \quad (10.60)$$

De plus, la convergence est plus rapide qd $|\lambda_j - \mu|$ est petit.

On considère le pb propre

$$(K - \mu M)\{\phi\} = \eta M\{\phi\}$$

Solution « $\eta_1, \{\phi_1\}$ »

Avec: $\eta_i = \lambda_i - \mu$

Reste le choix de « μ » qui reste complexe. Voir les différentes méthodes dans la littérature pour le choix approprié.

Cette méthode n'est pas recommandée avec l'itération directe, car le taux de convergence n'est intéressant que pour λ_n ou λ_1 du moment que la convergence se fera vers « λ_j » telle que:

$$|\lambda_j - \mu| > |\lambda_p - \mu|, \quad \forall p \neq j \quad (10.61)$$

Quelques propriétés des systèmes propres Translation spectrale

Exemple 4(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ (exemple 3) suivantes. Utiliser l'itération inverse pour calculer λ_1 et $\{\phi_1\}$. Utiliser une tolérance Tol = 10^{-6} (s=3). Puis utiliser un décalage de $\mu = 10$ et montrer que les valeurs convergent vers λ_4 et $\{\phi_4\}$

$$[K] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Par itération}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 3.
 $\lambda_4 = 10.63845$
 $\{\phi_4\} = \begin{Bmatrix} -0.10731 \\ 0.25539 \\ -0.72827 \\ 0.56227 \end{Bmatrix}$

On refait les mêmes étapes que l'exercice 2 de l'itération inverse pour calculer λ_1 et $\{\phi_1\}$

En partant des valeurs initiales choisies : $\{X_1\}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ et $\lambda_1 = 1$

Après 03 itérations, on converge vers λ_1 et $\{\phi_1\}$ $\lambda_1 = 0.09654$ $\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.3126 \\ 0.4955 \\ 0.4791 \\ 0.2898 \end{Bmatrix}$

En appliquant un décalage de $\mu = 10$, on aura

$$[K] - \mu[M] = \begin{bmatrix} -15 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -14 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

On utilise l'itération inverse pour résoudre le système propre suivant:

$$(K - \mu M)\{\phi\} = \eta M\{\phi\}$$

Solution (Convergence après 06 itérations): $\eta_1 = R(\{\bar{X}_7\}) = 0.6385$ $\{X_7\} = \begin{Bmatrix} -0.1076 \\ 0.2556 \\ -0.7283 \\ 0.5620 \end{Bmatrix}$

En comparant avec les résultats de l'exercice 4 (Itération directe), on remarque:

$\lambda_1 = \eta_1 + \mu = 10.6385$
 et $\{\phi_4\} = \{X_7\}$

(*) Pris de la référence BATHE J. « Finite elements procedures in engineering analysis », Prentice Hill Inc. dellatif MEGNOUNIF FT-Tlemcen

4. Itération avec quotient de Rayleigh

Pour augmenter la vitesse de convergence de l'itération inverse, on utilise le quotient de Rayleigh

Itération inverse classique

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Algorithme proposé

On choisit une valeur de $\{X_1\}$. $\lambda_1=1$

On choisit aussi une valeur initiale du décalage (généralement Zéro) $R(\{\bar{X}_1\})$

Soit. $\{Y_1\} = [M] \{X_1\}$ (10.62)

Pour chaque itération $k=1, 2, \dots$ on évalue

2) $(K - R(\{\bar{X}_k\})M)\{\bar{X}_{k+1}\} = \{Y_k\}$ (10.63)

3) $\{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\}$ (10.64)

4) $R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} + R(\{\bar{X}_k\})$ (10.65)

5) $\{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}}$ (10.66)

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération vectorielle) (Itération directe)

On aura, maintenant

Alors : $\{Y_{k+1}\}$ tend vers $M\{\phi_i\}$

Et. $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$ tend vers λ_i . qd k tend vers l'infini

Rem:

La paire « $\lambda_i, \{\phi_i\}$ » dépend du vecteur initial $\{X_1\}$ et du décalage $R(\{\bar{X}_1\})$

Si $\{X_1\}$ est proche d'un vecteur $\{\phi_k\}$ et si $R(\{\bar{X}_2\})$ donne un décalage suffisamment proche de « λ_k » alors l'algorithme convergera vers « $\lambda_k, \{\phi_k\}$ » avec un taux de convergence **Cubique**.

C'est la propriété la plus importante de la méthode

Exemple 5(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivantes.
Utiliser l'itération avec quotient de Rayleigh
pour calculer λ_1 et $\{\phi_1\}$. Utiliser une
tolérance Tol= 10^{-6} (s=3).

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K - R(\{\bar{X}_k\})M)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} + R(\{\bar{X}_k\}) \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

i) 1^{ère} Itération (k=1)

Choisir des valeurs initiales: $\{X_1\}^T = \{1 \ 1\}$ et $R(\{\bar{X}_1\})=0$

$$1) \quad \{Y_1\} = [M] \{X_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{Y_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad (K)\{\bar{X}_2\} = \{Y_1\} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \{\bar{X}_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{D'où} \quad \{\bar{X}_2\} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \quad \{\bar{Y}_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad \text{D'où} \quad \{\bar{Y}_2\} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} \quad R(\{\bar{X}_2\}) = \frac{\{\bar{X}_2\}^T \{Y_1\}}{\{\bar{X}_2\}^T \{\bar{Y}_2\}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}} = \frac{0.66666666}{0.27777777} = 2.40$$

$$5) \quad \{Y_2\} = \frac{\{\bar{Y}_2\}}{(\{\bar{X}_2\}^T \{\bar{Y}_2\})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{bmatrix} 0.94868 \\ 0.31623 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres

Itération avec quotient Rayleigh

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 5(*)

Même procédure pour l'itération 2, « ,... on aura

ii) 2^{ème} Itération (k=2)

$$\{\bar{X}_3\} = \begin{Bmatrix} -2.37171 \\ 0.08784 \end{Bmatrix} \quad R(\{\bar{X}_3\}) = 2.00548 \quad \{Y_3\} = \begin{Bmatrix} -0.99931 \\ 0.03701 \end{Bmatrix}$$

iii) 3^{ème} Itération (k=3)

$$\{\bar{X}_4\} = \begin{Bmatrix} 182.37496 \\ 0.00927 \end{Bmatrix} \quad R(\{\bar{X}_4\}) = 2.00000 \quad \{Y_4\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.00005 \end{Bmatrix}$$

On remarque que $R(\{\bar{X}_4\})$ converge après 03 itérations

Par itération

$$\begin{aligned} \{Y_1\} &= [M] \{X_1\} \\ (K - R(\{\bar{X}_k\})M)\{\bar{X}_{k+1}\} &= \{Y_k\} \\ \{\bar{Y}_{k+1}\} &= [M] \{\bar{X}_{k+1}\} \\ R(\{\bar{X}_{k+1}\}) &= \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} + R(\{\bar{X}_k\}) \\ \{Y_{k+1}\} &= \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Rem:

On peut prendre une autre valeur du vecteur initial et monter son effet sur la convergence de $R(\{\bar{X}_{k+1}\})$

Comme exercice : Prendre $\{X_1\}^T = \{1 \quad 0.1\}$ et trouver que 02 itérations sont suffisantes

ii. Les méthodes de transformation

En passant par les diagonalisations des matrices $[K]$ et $[M]$, en utilisant les relations :

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (10.67)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega] \quad (10.68)$$

Sachant que la matrice d'ordre « nxn » qui diagonalise les matrices de manière unique, on peut la **construire par itération**.

Le principe est d'appliquer des transformations élémentaires successives pour diagonaliser $[K]$ et $[M]$

Posons $[K_1] = [K]$ et $[M_1] = [M]$ on aura à former successivement les matrices suivantes:

$$\begin{aligned} [K_2] &= [T_1]^T [K_1] [T_1] & \text{et} & & [M_2] &= [T_1]^T [M_1] [T_1] \\ [K_3] &= [T_2]^T [K_2] [T_2] & \text{et} & & [M_3] &= [T_2]^T [M_2] [T_2] & (10.69) \\ [K_{k+1}] &= [T_k]^T [K_k] [T_k] & \text{et} & & [M_{k+1}] &= [T_k]^T [M_k] [T_k] \end{aligned}$$

Les matrices $[T_k]$ sont choisies pour diagonaliser $[K_{k+1}]$ et $[M_{k+1}]$ lorsque k tend vers l'infini

Si « l » est la dernière itération, on aura:

$$[\Omega] = [K_{l+1}] [M_{l+1}]^{-1} \quad \text{Ou bien}$$

$$\lambda_i = \frac{k_{ii}^{l+1}}{M_{ii}^{l+1}} \quad (10.70)$$

et
$$[\Psi] = [T_1] [T_2] \dots [T_l] [T_{l+1}] \quad (10.71)$$

Il faut ensuite normaliser les vecteurs obtenus

$$[\Phi] = [T_1] [T_2] \dots [T_l][T_{l+1}] \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_{ii}^{l+1}}} \right) \quad (10.72)$$

Les différentes méthodes de la littérature reposent sur le choix des matrices de transformation $[T_k]$

Rem:

Ces méthodes ne sont intéressantes que si les tailles des matrices permet leur implémentation en mémoire centrale et si on désire la totalité des solutions propres.

1. Méthode de Jacobi classique

Pour les pbs classiques (standards) $(K)\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$

Avantages:

- ✓ Simplicité et stabilité.
- ✓ Calcul des valeurs positives, négatives ou nulles de toute matrice symétrique

Avec $[M] = [I]$ (standards), l'éq. (10.69) à l'étape « k » s'écrit

$$[K_{k+1}] = [T_k]^T [K_k] [T_k] \quad \text{et} \quad [I] = [T_k]^T [T_k] \quad (10.73)$$

$$\begin{aligned} [K_{k+1}] &= [T_k]^T [K_k] [T_k] \\ [M_{k+1}] &= [T_k]^T [M_k] [T_k] \end{aligned}$$

La matrice $[T_k]$ est donc orthogonale.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi classique)

« θ » est choisie de façon à éliminer l'élément « k_{ij}^{k+1} ».

Soit

$$\tan 2\theta = \frac{2k_{ij}^k}{k_{ii}^k - k_{jj}^k} \quad \text{si } k_{ii}^k \neq k_{jj}^k \quad (10.75)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{si } k_{ii}^k = k_{jj}^k \quad (10.76)$$

Rem

Faire attention: un élément éliminé à une étape peut devenir non nul à l'étape suivante. Donc, il faut bien choisir par qui commencer.

Une possibilité est de commencer par le plus grand extra-diagonal qui demanderait un algorithme de recherche ce qui rend la méthode plus lente.

Pour cela, il faut juste travailler ligne par ligne ou bien colonne par colonne, c'est la procédure **de Jacobi cyclique**. Inconvénients, même pour de très petits éléments extra-diagonaux on continue à transformer. (time consuming)

Pour cela on utilise **la méthode de Jacobi avec seuil**. On utilise pour comparer (ligne par ligne ou colonne par colonne) les éléments extra-diagonaux à éliminer pour l'itération considérée. On arrête les transformations les éléments extra-diagonaux sont inférieurs au seuil.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi classique)

Algorithme de la méthode(*)

1. Définir la précision de convergence requise « ε »
2. Pour chaque cycle « s »

Définir la tolérance dynamique « $\varepsilon_s = 10^{-2s}$ »

Pour chaque ligne $i=1, 2, 3, \dots, n$

Pour chaque colonne $j=i+1, \dots, n$

Calculer le facteur de couplage (qui doit être très petit)

$$f_k = \left(\frac{\left(k_{ij}^{(s)} \right)^2}{k_{ii}^{(s)} k_{jj}^{(s)}} \right)^{1/2}$$

Si $f_k > \varepsilon_s$ alors

Calculer « θ » par (10.75) ou (10.76)

Transformer la matrice $[K_s]$

Colonne « i » = $\cos \theta$ x colonne i + $\sin \theta$ x colonne j

Colonne « j » = $-\sin \theta$ x colonne i + $\cos \theta$ x colonne j

Ligne « i » = $\cos \theta$ x ligne i + $\sin \theta$ x ligne j

Ligne « j » = $-\sin \theta$ x ligne i + $\cos \theta$ x ligne j

Modifier les vecteurs propres $[\Phi]$

Colonne « i » = $\cos \theta$ x colonne i + $\sin \theta$ x colonne j

Colonne « j » = $-\sin \theta$ x colonne i + $\cos \theta$ x colonne j

$$[K_{k+1}] = [T_k]^T [K_k] [T_k]$$

$$[\Phi] = [T_1] [T_2] \dots [T_l] [T_{l+1}] \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_{ii}^{l+1}}} \right)$$

(*) Pour plus de détails, voir **BATHE J. « Finite elements procedures in engineering analysis »**, Prentice Hill Inc.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi classique)

Algorithme de la méthode

Tester la convergence
Sur les valeurs propres

$$\left| \frac{k_{ii}^{(s+1)} - k_{ii}^{(s)}}{k_{ii}^{(s)}} \right| \leq \varepsilon ; \quad i = 1, \dots, n \quad (10.77)$$

Et sur les coefficients de couplage

$$\left(\frac{(k_{ij}^{(s+1)})^2}{k_{ii}^{(s+1)} k_{jj}^{(s+1)}} \right)^{1/2} \leq \varepsilon ; \quad \text{pour tout } i, j; i < j \quad (10.78)$$

Si la convergence n'est pas atteinte, alors commencer un nouveau cycle « s »

Quelques propriétés des systèmes propres **Méthode de Jacobi classique**

Exemple 6(*)

Soit la matrice $[K]$ suivante. Utiliser la méthode de Jacobi classique avec un seuil 10^{-2} pour calculer les valeurs et vecteurs propres

$$[K] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Pour un cycle, il faut faire 06 transformations (Ex. ligne par ligne
($i=1, j=2$); ($i=1, j=3$); ($i=1, j=4$); ($i=2, j=3$); ($i=2, j=4$) et ($i=3, j=4$))

i) 1^{er} cycle (s=1)

1) $i=1$ et $j=2$: 1^{er} élément extra-diagonal.

$$k_{ii}^k \neq k_{jj}^k \text{ d'ou } \tan 2\theta = \frac{2k_{ij}^k}{k_{ii}^k - k_{jj}^k} = \frac{2(-4)}{5 - 6} = 8 \text{ d'ou } 2\theta = 82.87 \text{ } \cos \theta = 0.7497 \text{ et } \sin \theta = 0.6618$$

1^{ère} matrice de transformation

$$[T_1] = [\Phi] = \begin{bmatrix} 0.7497 & -0.6618 & 0 & 0 \\ 0.6618 & 0.7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{D'où} \quad [K_2] = [T_1]^T [K_1] [T_1]$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0.7497 & 6.618 & 0 & 0 \\ -0.6618 & 0.7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7497 & -0.6618 & 0 & 0 \\ 0.6618 & 0.7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 1.469 & 0 & -1.898 & 0.6618 \\ 0 & 9.531 & -3.661 & 0.7497 \\ -1.898 & -3.661 & 6 & -4 \\ 0.6618 & 0.7497 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres Méthode de Jacobi classique

i) 1^{er} cycle (s=1) Exemple 6(*)

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 1.469 & 0 & -1.898 & 0.6618 \\ 0 & 9.531 & -3.661 & 0.7497 \\ -1.898 & -3.661 & 6 & -4 \\ 0.6618 & 0.7497 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

2) **i=1 et j=3** : 2^{ème} élément extra-diagonal. (Même ligne)

$$k_{ii}^k \neq k_{jj}^k \text{ d'ou } \tan 2\theta = \frac{2k_{ij}^k}{k_{ii}^k - k_{jj}^k} = \frac{2(-1.898)}{1.469 - 6} = 0.8378 \text{ d'ou } 2\theta = 39.957 \quad \text{Cos } \theta = 0.9398 \text{ et Sin } \theta = 0.3416$$

2^{ème} matrice de transformation

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0.9398 & 0 & -0.3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{D'où} \quad [K_3] = [T_2]^T [K_2] [T_2] = [T_2]^T [T_1]^T [K_1] [T_1] [T_2]$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 0.9398 & 0 & 0.3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.469 & 0 & -1.898 & 0.6618 \\ 0 & 9.531 & -3.661 & 0.7497 \\ -1.898 & -3.661 & 6 & -4 \\ 0.6618 & 0.7497 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9398 & 0 & -0.3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 0.7792 & -1.250 & 0 & -0.7444 \\ -1.250 & 9.531 & -3.440 & 0.7497 \\ 0 & -3.440 & 6.690 & -3.986 \\ -0.7444 & 0.7497 & -3.986 & 5 \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0.7046 & -0.6618 & -0.2561 & 0 \\ 0.6220 & 0.7497 & -0.2261 & 0 \\ 0.3416 & 0 & 0.9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) **i=1 et j=4** : 3^{ème} élément extra-diagonal. (Même ligne)

3^{ème} matrice de transformation

$$\text{Cos } \theta = 0.9857 \text{ et Sin } \theta = 0.1687$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0.9857 & 0 & 0 & -0.1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix} \quad \text{D'où} \quad [K_4] = [T_3]^T [K_3] [T_3] = [T_3]^T [T_2]^T [T_1]^T [K_1] [T_1] [T_2] [T_3]$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 0.9857 & 0 & 0 & 0.1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7792 & -1.250 & 0 & -0.7444 \\ -1.250 & 9.531 & -3.440 & 0.7497 \\ 0 & -3.440 & 6.690 & -3.986 \\ -0.7444 & 0.7497 & -3.986 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9857 & 0 & 0 & -0.1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix}$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -1.106 & -0.6725 & 0 \\ -1.106 & 9.531 & -3.440 & 0.9499 \\ -0.6725 & -3.440 & 6.690 & -3.928 \\ 0 & 0.9499 & -3.928 & 5.127 \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [T_1][T_2][T_3] = \begin{bmatrix} 0.6945 & -0.6618 & -0.2561 & -0.1189 \\ 0.6131 & 0.7497 & -0.2261 & -0.1050 \\ 0.3367 & 0 & 0.9398 & -0.0576 \\ 0.1687 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres Méthode de Jacobi classique

i) 1^{er} cycle (s=1) Exemple 6(*)

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -1.106 & -0.6725 & 0 \\ -1.106 & 9.531 & -3.440 & 0.9499 \\ -0.6725 & -3.440 & 6.690 & -3.928 \\ 0 & 0.9499 & -3.928 & 5.127 \end{bmatrix}$$

4) **i=2 et j=3** : 1^{ème} élément extra-diagonal. (ligne 2)

$$\text{Cos } \theta = 0.8312 \text{ et Sin } \theta = -0.5560$$

4^{ème} matrice de transformation

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8312 & 0.5560 & 0 \\ 0 & -0.5560 & 0.8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$[K_5] = [T_4]^T [K_4] [T_4] = [T_4]^T [T_3]^T [T_2]^T [T_1]^T [K_1] [T_1] [T_2] [T_3] [T_4]$$

$$[K_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8312 & -0.5560 & 0 \\ 0 & 0.5560 & 0.8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6518 & -1.106 & -0.6725 & 0 \\ -1.106 & 9.531 & -3.440 & 0.9499 \\ -0.6725 & -3.440 & 6.690 & -3.928 \\ 0 & 0.9499 & -3.928 & 5.127 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8312 & 0.5560 & 0 \\ 0 & -0.5560 & 0.8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_5] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5453 & -1.174 & 0 \\ -0.5453 & 11.83 & 0 & 2.974 \\ -1.174 & 0 & 4.388 & -2.737 \\ 0 & 2.974 & -2.737 & 5.127 \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [T_1][T_2][T_3][T_4] = \begin{bmatrix} 0.6945 & -0.4077 & -0.5808 & -0.1189 \\ 0.6131 & 0.7488 & 0.2289 & -0.1050 \\ 0.3367 & -0.5226 & 0.7812 & -0.0576 \\ 0.1682 & 0 & 0 & 0.9857 \end{bmatrix}$$

5) **i=2 et j=4** : 2^{ème} élément extra-diagonal. (ligne 2)

5^{ème} matrice de transformation

$$\text{Cos } \theta = 0.9349 \text{ et Sin } \theta = 0.3549$$

$$[T_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9394 & 0 & -0.3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3549 & 0 & 0.9394 \end{bmatrix}$$

D'où

$$[K_6] = [T_5]^T [K_5] [T_5] = [T_5]^T [T_4]^T [T_3]^T [T_2]^T [T_1]^T [K_1] [T_1] [T_2] [T_3] [T_4] [T_5]$$

$$[K_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9394 & 0 & 0.3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.3549 & 0 & 0.9394 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5453 & -1.174 & 0 \\ -0.5453 & 11.83 & 0 & 2.974 \\ -1.174 & 0 & 4.388 & -2.737 \\ 0 & 2.974 & -2.737 & 5.127 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9394 & 0 & -0.3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3549 & 0 & 0.9394 \end{bmatrix}$$

$$[K_6] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -1.174 & 0.1935 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.9713 & 0 \\ -1.174 & -0.9713 & 4.388 & -2.559 \\ 0.1935 & 0 & -2.559 & 3.999 \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [T_1][T_2][T_3][T_4][T_5] = \begin{bmatrix} 0.6945 & -0.4233 & -0.5808 & 0.0335 \\ 0.6131 & 0.6628 & 0.2289 & -0.3639 \\ 0.3367 & 0.5090 & 0.7812 & 0.1316 \\ 0.1687 & 0.3498 & 0 & 0.9213 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des systèmes propres Méthode de Jacobi classique

i) 1^{er} cycle (s=1) Exemple 6(*)

$$[K_6] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -1.174 & 0.1935 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.9713 & 0 \\ -1.174 & -0.9713 & 4.388 & -2.559 \\ 0.1935 & 0 & -2.559 & 3.999 \end{bmatrix}$$

6) **i=3 et j=4** : dernier élément du cycle 1. (ligne 3)

$$\cos \theta = 0.7335 \text{ et } \sin \theta = -0.6797$$

6^{ème} matrice de transformation

$$[T_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7335 & 0.6797 \\ 0 & 0 & -0.6797 & 0.7335 \end{bmatrix}$$

D'où $[K_7] = [T_6]^T [K_6] [T_6] = [T_6]^T [T_5]^T [T_4]^T [T_3]^T [T_2]^T [T_1]^T [K_1] [T_1] [T_2] [T_3] [T_4] [T_5] [T_6]$

$$[K_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7335 & -0.6797 \\ 0 & 0 & 0.6797 & 0.7335 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -1.174 & 0.1935 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.9713 & 0 \\ -1.174 & -0.9713 & 4.388 & -2.559 \\ 0.1935 & 0 & -2.559 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7335 & 0.6797 \\ 0 & 0 & -0.6797 & 0.7335 \end{bmatrix}$$

$$[K_7] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -0.9926 & -0.6560 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.7124 & -0.6602 \\ -0.9926 & -0.7124 & 6.7596 & 0 \\ -0.6560 & -0.6602 & 0 & 1.6272 \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [T_1][T_2][T_3][T_4][T_5][T_6] = \begin{bmatrix} 0.6945 & -0.4233 & -0.4488 & -0.3702 \\ 0.6131 & 0.6628 & 0.4152 & -0.1113 \\ 0.3367 & -0.5090 & 0.4835 & 0.6275 \\ 0.1687 & 0.3498 & -0.6264 & 0.6759 \end{bmatrix}$$

Fin du 1^{er} Cycle. Pas de convergence et les extra-diagonaux ne sont pas nuls.

On refait la même chose pour un 2^{ème} cycle en partant de la matrice $[K_7]$

Quelques propriétés des systèmes propres **Méthode de Jacobi classique**

ii) 2^{ème} cycle (s=2)

Exemple 6(*)

$$[K_7] = \begin{bmatrix} 0.6518 & -0.5098 & -0.9926 & -0.6560 \\ -0.5098 & 12.96 & -0.7124 & -0.6602 \\ -0.9926 & -0.7124 & 6.7596 & 0 \\ -0.6560 & -0.6602 & 0 & 1.6272 \end{bmatrix}$$

La procédure est la même, on refait les transformations pour tous les éléments

(i=1,j=2); (i=1,j=3); (i=1,j=4); (i=2,j=3); (i=2,j=4) et (i=3,j=4)

On obtient à la fin du cycle 2

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0.1563 & -0.3635 & 0.0063 & -0.0176 \\ -0.3635 & 13.08 & -0.0020 & 0 \\ 0.0063 & -0.0020 & 6.845 & 0 \\ -0.0176 & 0 & 0 & 1.910 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.3875 & -0.3612 & -0.6017 & -0.5978 \\ 0.5884 & 0.6184 & 0.3710 & -0.3657 \\ 0.6148 & -0.5843 & 0.3714 & 0.3777 \\ 0.3546 & 0.3816 & -0.6020 & 0.6052 \end{bmatrix}$$

Fin du 2^{ème} Cycle. Pas de convergence et les extra-diagonaux ne sont pas nuls.
On refait la même chose pour un 3^{ème} cycle en partant le matrice $[\Omega]$

iii) 3^{ème} cycle (s=3)

La procédure est la même, on refait les transformations pour tous les éléments
(i=1,j=2); (i=1,j=3); (i=1,j=4); (i=2,j=3); (i=2,j=4) et (i=3,j=4)

On obtient à la fin du cycle 3

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0.1459 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.854 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.910 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.3717 & -0.3717 & -0.6015 & -0.6015 \\ 0.6015 & 0.6015 & 0.3717 & -0.3717 \\ 0.6015 & -0.6015 & 0.3717 & 0.3717 \\ 0.3717 & 0.3717 & -0.6015 & 0.6015 \end{bmatrix}$$

Fin du 3^{ème} Cycle. Il y a convergence et tous les extra-diagonaux sont nuls
On arrête la procédure à cette étape et on écrit les résultats finaux, en réarrangeant les valeurs propres par ordre croissant

Quelques propriétés des systèmes propres **Méthode de Jacobi classique**

Exemple 6(*)

**Résultats finaux après 03 cycles
(06 x 03 transformations)**

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0.1459 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.854 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.910 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.3717 & -0.3717 & -0.6015 & -0.6015 \\ 0.6015 & 0.6015 & 0.3717 & -0.3717 \\ 0.6015 & -0.6015 & 0.3717 & 0.3717 \\ 0.3717 & 0.3717 & -0.6015 & 0.6015 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.1459 \quad \{\phi_1\} = \begin{bmatrix} 0.3717 \\ 0.6015 \\ 0.6015 \\ 0.3717 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 6.854 \quad \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} -0.6015 \\ 0.3717 \\ 0.3717 \\ -0.6015 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1.910 \quad \{\phi_2\} = \begin{bmatrix} -0.6015 \\ -0.3717 \\ 0.3717 \\ 0.6015 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = 13.09 \quad \{\phi_4\} = \begin{bmatrix} -0.3717 \\ 0.6015 \\ -0.6015 \\ 0.3717 \end{bmatrix}$$

2. Méthode de Jacobi généralisée

Pour les pbs généralisés $(K)\{\phi\} = \lambda(M)\{\phi\}$

Permet de diagonaliser directement les matrices $[K]$ et $[M]$ sans passer par la transformation du pb propre.

Le processus et le principe sont similaires que ceux de Jacobi classique avec une autre matrice de transformation

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi généralisée)

Sachant qu'en calculant

$$[\mathbf{K}_{k+1}] = [\mathbf{T}_k]^T [\mathbf{K}_k] [\mathbf{T}_k]$$

et

$$[\mathbf{M}_{k+1}] = [\mathbf{T}_k]^T [\mathbf{M}_k] [\mathbf{T}_k]$$

Et sachant que les termes extra-diagonaux sont nuls

$$k_{ij}^{k+1} = 0$$

et

$$M_{ij}^{k+1} = 0$$

On arrive aux équations en « α » et « β »

(10.80)

$$\alpha K_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha \beta) K_{ij}^{(k)} + \beta K_{jj}^{(k)} = 0$$
$$\alpha M_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha \beta) M_{ij}^{(k)} + \beta M_{jj}^{(k)} = 0$$

pour $\frac{K_{ii}^{(k)}}{M_{ii}^{(k)}} \neq \frac{K_{jj}^{(k)}}{M_{jj}^{(k)}} \neq \frac{K_{ij}^{(k)}}{M_{ij}^{(k)}}$

Si $\frac{K_{ii}^{(k)}}{M_{ii}^{(k)}} = \frac{K_{jj}^{(k)}}{M_{jj}^{(k)}} = \frac{K_{ij}^{(k)}}{M_{ij}^{(k)}}$ alors $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{K_{ij}^{(k)}}{K_{jj}^{(k)}}$ (10.81)

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi généralisée)

D'une façon générale (pour la programmation)

On pose

$$\begin{aligned} a_1 &= K_{ii}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{ij}^{(k)} \\ a_2 &= K_{jj}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{jj}^{(k)} K_{ij}^{(k)} \\ a_3 &= K_{ii}^{(k)} M_{jj}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{jj}^{(k)} \\ a_4 &= \frac{a_3}{2} + \text{signe}(a_3) \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + a_1 a_2} \end{aligned} \quad (10.82)$$

On aura « α » et « β »

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_2}{a_4} \\ \beta &= -\frac{a_1}{a_4} \end{aligned} \quad (10.83)$$

Si $a_4 = 0$ alors $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{K_{ij}^{(k)}}{K_{jj}^{(k)}}$

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi généralisée)

Algorithme de la méthode(*)

(Même que classique, ajouter le coefficient de couplage de de la masse)

1. Définir la précision de convergence requise « ϵ »
2. Pour chaque cycle « s »

Définir la tolérance dynamique « $\epsilon_s = 10^{-2s}$ »

Pour chaque ligne $i=1, 2, 3, \dots, n$

Pour chaque colonne $j=i+1, \dots, n$

Calculer les facteurs de couplage (qui doivent être très petits)

$$f_k = \left(\frac{(k_{ij}^{(s)})^2}{k_{ii}^{(s)} k_{jj}^{(s)}} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad f_m = \left(\frac{(M_{ij}^{(s)})^2}{M_{ii}^{(s)} M_{jj}^{(s)}} \right)^{1/2}$$

Si $f_k > \epsilon_s$ Si $f_m > \epsilon_s$ alors

Calculer « α » et « β » par (10.81) ou (10.83)

Transformer la matrice $[K_s]$ et $[M_s]$

Colonne « i » = colonne i + β x colonne j

Colonne « j » = α x colonne i + colonne j

Ligne « i » = ligne i + β x ligne j

Ligne « j » = α x ligne i + ligne j

Modifier les vecteurs propres $[\Phi]$

Colonne « i » = colonne i + β x colonne j

Colonne « j » = α x colonne i + colonne j

$$[K_{k+1}] = [T_k]^T [K_k] [T_k]$$

$$[M_{k+1}] = [T_k]^T [M_k] [T_k]$$

$$[\Phi] = [T_1] [T_2] \dots [T_1] [T_{1+1}] \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_{ii}^{l+1}}} \right)$$

(*) Pour plus de détails, voir BATHÉ J. « Finite elements procedures in engineering analysis », Prentice Hill Inc.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation) (Méthode de Jacobi généralisée)

Algorithme de la méthode

Tester la convergence
Sur les valeurs propres

Avec $\lambda_i^{(s+1)} = \frac{k_{ii}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)}}$ on teste $\left| \frac{\lambda_i^{(s+1)} - \lambda_i^{(s)}}{\lambda_i^{(s)}} \right| \leq \varepsilon ; \quad i = 1, \dots, n \quad (10.84)$

Et sur les coefficients de couplage

$$\left(\frac{\left(k_{ij}^{(s+1)} \right)^2}{k_{ii}^{(s+1)} k_{jj}^{(s+1)}} \right)^{1/2} \leq \varepsilon ; \quad \text{pour tout } i, j; i < j$$
$$\left(\frac{\left(M_{ij}^{(s+1)} \right)^2}{M_{ii}^{(s+1)} M_{jj}^{(s+1)}} \right)^{1/2} \leq \varepsilon ; \quad \text{pour tout } i, j; i < j$$

(10.85)

Si la convergence n'est pas atteinte, alors commencer un nouveau cycle « s »

Quelques propriétés des systèmes propres Jacobi Généralisée

Exemple 6(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ (exemple 3) suivantes. Déterminer les valeurs et vecteurs propres par Jacobi généralisée

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= K_{ii}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{ij}^{(k)} \\ a_2 &= K_{jj}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{jj}^{(k)} K_{ij}^{(k)} \\ a_3 &= K_{ii}^{(k)} M_{jj}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{jj}^{(k)} \\ a_4 &= \frac{a_3}{2} + \text{signe}(a_3) \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + a_1 a_2} \\ \alpha &= \frac{a_2}{a_4} \quad \beta = -\frac{a_1}{a_4} \end{aligned}$$

On calcule d'abord les « a_i » pour déterminer « α » et « β » pour la matrice de transformation

$$a_1 = K_{ii}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{ij}^{(k)} = 1(1) - 2(-1) = 3$$

$$a_2 = K_{jj}^{(k)} M_{ij}^{(k)} - M_{jj}^{(k)} K_{ij}^{(k)} = 3$$

$$a_3 = K_{ii}^{(k)} M_{jj}^{(k)} - M_{ii}^{(k)} K_{jj}^{(k)} = 1(2) - 1(2) = 0$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_4} = 1 \quad \text{1}^{\text{ère}} \text{ matrice de transformation}$$

$$\beta = -\frac{a_1}{a_4} = -1$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2} + \text{signe}(a_3) \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + a_1 a_2} = 3$$

$$[K_{k+1}] = [T_k]^T [K_k] [T_k]$$

$$[M_{k+1}] = [T_k]^T [M_k] [T_k]$$

$$[K_2] = [T_1]^T [K_1] [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = [T_1]^T [M_1] [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices Diagonalisées

Valeurs propres ($\lambda_1 < \lambda_2$)

$$\lambda_i^{(s+1)} = \frac{k_{ii}^{(s+1)}}{k_{ii}^{(s+1)}}$$

$$\lambda_1 = \frac{0}{6} = 0 \quad \lambda_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs propres ($\lambda_1 < \lambda_2$)

$$[\Phi] = [T_1] [T_2] \dots [T_1] [T_{1+1}] \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_{ii}^{l+1}}} \right)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Après réarrangement

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Rem: $[K]$ singulière (Det $[K]=0$) d'où $\lambda_1 = 0$

3. Méthode Householder-QR-itération inverse

Pour les pbs classiques $(K)\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$ Et généralisés, après les avoir transformés en classique

03 grandes étapes:

1. Des transformations householder pour rendre la matrice tridiagonale (diagonale + 02 codiagonales non nulles)
2. Appliquer l'itération QR pour obtenir toutes les valeurs propres
3. Calculer les vecteurs propres par une méthode appropriée, généralement l'itération inverse

Etape 1. Tridiagonalisation de Householder

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

L'algorithme est appliqué une seule fois (pas d'itération).

$k=1, 2, \dots, n-2$

La méthode nécessite « n-2 » transformations de type $[K_{k+1}] = [T_k]^T [K_k] [T_k]$ où $[T_k]$ est la transformation de Householder (matrice de réflexion) donnée par

$$[T_k] = [I] - \theta_k \{W_k\} \{W_k\}^T \quad (10.86)$$

Avec: $[I]$ matrice identité d'ordre « n »

$$\{W_k\} = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 | w_{k+1} \quad w_{k+2} \quad \dots \quad w_n)^T \ll nx1 \gg \quad (10.87)$$

Et
$$\theta_k = \frac{2}{\{W_k\}^T \{W_k\}} \quad (10.88)$$

$\{W_k\}$ est un vecteur choisi arbitraire qui permet la réflexion du vecteur utilisant $[T_k]$ (Voir BATHE) ($[T_k]x \{V\}$ réflexion de V) dans le plan dont la normale est $\{W_k\}$.

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes de transformation)

Méthode Householder-QR-itération inverse

Etape 1. Tridiagonalisation de Householder

$\{W_k\}$ est un vecteur choisi arbitraire qui permet la réflexion du vecteur utilisant $[T_k]$ (Voir BATHE) ($[T_k]x\{V\}$ réflexion de V) dans le plan dont la normale est $\{W_k\}$.

Exemple de détermination de $\{W_k\}$. Soit la matrice suivante

k=1, on réduit la 1^{ère} colonne

$$[K] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Pour k=1, on partitionne $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_1^T \\ k_1 & K_{11} \end{bmatrix}$$

Pour k=1, on partitionne $\{W_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{W}_1 \end{bmatrix}$ avec $\bar{W}_1 = k_1 + \text{sign}(k_{21}) \|k_1\|_2 e_1$

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{sign}(-4) \sqrt{(-4)^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.1231 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{D'où: } \{W_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8.1231 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{2}{\{W_1\}^T \{W_1\}} = \frac{2}{66.9847} = 0.0298575$$

$$[T_1] = [I] - \theta_1 \{W_1\} \{W_1\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.0298575 \begin{bmatrix} 0 \\ -8.1231 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -8.1231 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9701 & 0.2425 & 0 \\ 0 & 0.2425 & 0.9701 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [T_1]^T [K_1] [T_1] = \begin{bmatrix} 5 & 4.1231 & 0 & 0 \\ 4.1231 & 7.8823 & 3.5294 & -1.9403 \\ 0 & 3.5294 & 4.1177 & -3.6380 \\ 0 & -1.9403 & -3.6380 & 5 \end{bmatrix}$$

k=2, on réduit la 2^{ème} colonne

$$\bar{W}_2 = \begin{bmatrix} 3.5294 \\ -1.9403 \end{bmatrix} + \sqrt{(3.5294)^2 + (-1.9403)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5570 \\ -1.9403 \end{bmatrix} \quad \text{D'où: } \{W_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.5570 \\ -1.9403 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{2}{\{W_2\}^T \{W_2\}} = 0.0328553$$

$$[T_2] = [I] - \theta_2 \{W_2\} \{W_2\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8763 & 0.4817 \\ 0 & 0 & 0.4817 & 0.8763 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K_3] = [T_2]^T [K_2] [T_2] = \begin{bmatrix} 5 & 4.1231 & 0 & 0 \\ 4.1231 & 7.8823 & -4.0276 & 0 \\ 0 & -4.0276 & 7.3941 & 2.3219 \\ 0 & 0 & 2.3219 & 1.7236 \end{bmatrix}$$

Pour plus de détails, voir BATHE J. « Finite elements procedures in engineering analysis », Prentice Hill Inc.

Etape 2. Itération QR

Appliquée à la matrice tridiagonalisée

QR est un processus itératif qui permet de déterminer toutes les valeurs propres

Le principe de la méthode est de décomposer la matrice $[K]$ sous la forme:

$$[K] = [Q] [R] \quad (10.89)$$

$[Q]$ matrice orthogonale ($[Q]^T = [Q]^{-1}$) et $[R]$ matrice triangulaire supérieure.

On peut utiliser la même matrice de transformation de rotation de Jacobi classique pour ceci.

On peut aussi écrire (10.89) sous la forme:

$$[R] [Q] = [Q]^T [K] [Q] \quad (10.90)$$

Qui peut être vue comme les mêmes transformations déjà citées

Etape 3. Calcul des vecteurs propres

Les valeurs propres de la matrice tridiagonale sont les mêmes que celles de la matrice initiale

Les vecteurs propres obtenus par Householder QR (disons $\{\psi_i\}$) sont ceux de la matrice tridiagonale.

Pour obtenir les vecteurs propres initiaux (disons $\{\phi_i\}$), il faut les transformer en utilisant les transformations de Householder.

$$\{\phi_i\} = [T_1][T_2] \dots [T_{n-2}]\{\psi_i\} \quad (10.91)$$

Certains auteurs ont proposé d'utiliser des itérations inverses sur la matrice $[K]$ avec des translations spectrales égales aux valeurs propres dont on veut calculer les vecteurs propres. Ça évite d'effectuer et de stocker le produit des matrices de transformation de Householder (**qui est en général non symétrique**)

iii. Les méthodes d'itération polynomiale

Le polynôme caractéristique du pb propre est donné par

$$p(\lambda) = \det|K - \lambda M| \quad (10.92)$$

Les racines du polynôme sont les valeurs propres.

On opère directement sur les matrices $[K]$ et $[M]$ initiales. Pas besoin de les transformer.

Méthode ne donne que les valeurs propres.

Pour le calcul des vecteurs, on utilise les autres méthodes telle que les itérations inverses avec translations spectrales

1. Méthode explicite

1^{ère} étape consiste à exprimer, en déterminant les « a_i »

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \quad (10.93)$$

On calculera ensuite les racines du polynôme, en utilisant les méthodes mathématiques assez simples telles que l'itération de Newton ou l'itération sécante.

Inconvénients:

- ✓ Pour de grands systèmes, calcul très important
- ✓ Une petite erreur sur l'évaluation des « a_i » conduit à de grandes erreurs sur les racines du polynôme.

Abandonnée pour la méthode implicite

2. Méthode implicite

On calcule directement les solutions sans évaluer les coefficients « a_i », en décomposant la matrice $([K] - \lambda[M])$

$$[K] - \lambda[M] = [L][S] \quad (10.94)$$

$[L]$: matrice triangulaire inférieure avec éléments diagonaux égaux à « 1 »

$[S]$: matrice triangulaire supérieure

D'où

$$\det([K] - \lambda[M]) = \prod_{i=1}^n S_{ii} \quad (10.95)$$

$$\begin{aligned} \det([K] - \lambda[M]) &= \det [L] \det[S] \\ &= 1 \times \prod_{i=1}^n S_{ii} \end{aligned}$$

Si $([K] - \lambda[M])$ est symétrique (c'est le cas) et n'est pas altérée lors de la décomposition, alors:

$$[S] = [D][L]^T \quad [D]: \text{matrice diagonale} \quad (10.96)$$

D'où

$$\det([K] - \lambda[M]) = \prod_{i=1}^n D_{ii} \quad (10.97)$$

Méthodes de résolution des systèmes propres (Les méthodes d'itération polynomiale) (Méthode implicite)

Pour le calcul de $P(\lambda)$, plusieurs stratégies d'itération pour les solutions.

L'itération sécante

(la plus connue)

Où on utilise une interpolation linéaire

Avec : $\mu_{k-1} < \mu_k$

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{P(\mu_k)}{P(\mu_k) - P(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1}) \quad (10.98)$$

μ_k : valeur approchée de la valeur propre à l'itération « k ».

- ✓ Initialement, choisir μ_1 et μ_2
- ✓ Calculer μ_3 par (10.98)
- ✓ Utiliser μ_2 et μ_3 pour calculer μ_4
- ✓ puis continuer ainsi de suite jusqu'à convergence (valeur de μ_k ne change plus)

Cette technique à utiliser avec précaution, car des valeurs de μ_1 et μ_2 arbitraires (ou inférieures à λ_1) peuvent ne pas converger

Quelques propriétés des systèmes propres

Itération implicite polynomiale

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{P(\mu_k)}{P(\mu_k) - P(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1})$$

Exemple 7(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivantes.
Utiliser la méthode implicite de l'itération polynomiale avec l'itération sécante pour calculer λ_1

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Choisir des valeurs initiales: $\mu_1 = -1$ et $\mu_2 = 0$

$$p(-1) = \det|K - (-1)M| = \det \begin{bmatrix} 5/2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5/2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & -5/23 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 23/5 & 0 \\ 0 & 0 & 105/46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & -5/23 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(-1) = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{23}{5}\right) \left(\frac{105}{46}\right) = 26.25$$

De même: $p(0) = \det|K - (0)M| = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12$

Prochain décalage $\mu_3 = \mu_2 - \frac{P(\mu_2)}{P(\mu_2) - P(\mu_1)} (\mu_2 - \mu_1) = 0 - \frac{12}{12 - 26.25} (0 - (-1)) = 0.8421$

En continuant de la même manière, on aura

$$p(0.8421) = \det|K - (0.8421)M| = 4.7150 \quad \mu_4 = 1.3871$$

$$p(1.3871) = \det|K - (1.3871)M| = 1.8467 \quad \mu_5 = 1.7380$$

$$p(1.7380) = \det|K - (1.7380)M| = 0.63136 \quad \mu_6 = 1.9203$$

$$p(1.9203) = \det|K - (1.9203)M| = 0.16899 \quad \mu_7 = 1.9870$$

$$p(1.9870) = \det|K - (1.9870)M| = 0.026348 \approx 0 \quad \mu_8 = 1.9993$$

Après 06 itérations, on obtient

$$\lambda_1 = 1.9993$$

iv. Les méthodes basées sur les propriétés de la séquence de Sturm

Propriété:

Soit « μ », un réel quelconque.

En décomposant la matrice $([K] - \mu[M])$ en $[L][D][L]^T$

Le nbr de termes négatifs dans $[D]$ est égal au nbr de valeurs propres du système initial inférieures à « μ ».

On ne déterminera que les valeurs propres. Les vecteurs propres seront déterminés par l'itération inverse avec translation spectrale

Supposons qu'on veut calculer les valeurs propres entre 02 bornes (inf λ_i et sup λ_s)

Principe de base

Triangulariser $([K] - \mu_k[M])$. Tirer des informations sur les valeurs propres à partir des signes des éléments diagonaux de la matrice factorisée.

On utilise généralement

La méthode de la bisection

Méthode de la bisection

1. Factoriser $([K] - \lambda_i[M])$ et compter le nbr de valeurs propres $q_i < \lambda_i$.
2. Factoriser $([K] - \lambda_s[M])$ et compter le nbr de valeurs propres $q_s < \lambda_s$. Il ya donc $(q_s - q_i)$ entre $(\lambda_s$ et $\lambda_i)$
3. Utiliser la technique de la bisection pour cerner les intervalles des valeurs propres. Ceux ayant plus d'une valeur seront bisectionnés et le test de la séquence de Sturm sera effectué jusqu'à isoler toutes les valeurs.
4. A la précision voulue, calculer les valeurs propres par une méthode plus effective telle que la méthode de l'itération sécante et déduire les vecteurs propres correspondants par itération inverse.

Inconvénients de la méthode

1. Obligatoire la factorisation de $([K] - \mu_k[M])$ plusieurs fois.
2. La convergence peut être très lente lors de la recherche des intervalles isolant les valeurs propres.

5. Méthodes de résolution des grands systèmes propres

Les méthodes déjà développées, aucune d'elles n'est totalement efficace et le choix de la technique à utiliser dépend de la nature du pb posé.

Il est plus judicieux de combiner ces méthodes de base pour bien tirer profit de leurs propriétés.

Actuellement, les plus efficaces en élément fini, en dynamique:

Recherche du déterminant

Itération sur sous espace

Nbr réduit (les « p » plus petites) valeurs propres et vecteurs propres correspondants

Suffisant en analyse dynamique

i. Méthode de la recherche du déterminant

03 principes:

- 1. Une itération polynomiale sur $P(\lambda)$**
- 2. Utilisation de la propriété de la séquence de Sturm des polynômes $P(\lambda)$ et $P^r(\lambda^r)$**
- 3. Itération inverse avec translation spectrale**

La méthode suggère qu'on commence d'abord par calculer une approximation de la valeur propre par itération polynomiale puis on déduit le vecteur propre par itération inverse avec translation spectrale.

Méthode ?

Considérons le couple : « $\lambda_1, \{\phi_1\}$ ».

Soient « μ_{k-1} » et « μ_k » les approximations de « λ_1 » tq

$$\mu_{k-1} < \mu_k < \lambda_1$$

Le premier objectif est d'obtenir un décalage proche de λ_1 par itération sécante accélérée où le décalage sera:

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \eta \frac{P(\mu_k)}{P(\mu_k) - P(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1}) \quad (10.99)$$

Avec: η une constante. Pour $\eta = 1$, on retrouve la méthode d'itération sécante standard
Généralement $\eta = 2$ pour accélérer le processus

On utilisera ensuite la propriété de la séquence de Sturm pour éliminer le risque de sauter une valeur propre.

Méthode ?

Pour évaluer $P(\lambda)$, on décompose $([K] - \lambda[M])$ en $[L][D][L]^T$ et donc:

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^n D_{ii} \quad (10.100)$$

Une fois trouvé « μ_k » proche de « λ_1 » par itération sécante, on calcule $([\bar{K}] = [K] - \mu_k[M])$ et on effectue une itération inverse. Soit

$$[\bar{K}]\{\bar{X}_{k+1}\} = \{Y_k\} \quad (10.101)$$

$$\{\bar{Y}_{k+1}\} = [M]\{\bar{X}_{k+1}\} \quad (10.102)$$

$$R(\{\bar{X}_{k+1}\}) = \frac{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}}{\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}} + R(\{\bar{X}_k\}) \quad (10.103)$$

$$\{Y_{k+1}\} = \frac{\{\bar{Y}_{k+1}\}}{(\{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\})^{\frac{1}{2}}} \quad (10.104)$$

Méthode ?

On termine par un calcul d'erreur, pour chaque couple propre

$$\varepsilon_i = \frac{\left\| [K]\{\phi_i\}^{(l+1)} - \lambda_i^{(l+1)} [M]\{\phi_i\}^{(l+1)} \right\|_2}{\left\| [K]\{\phi_i\}^{(l+1)} \right\|_2} \quad (10.105)$$

$\{\phi_i\}^{(l+1)}$ et $\lambda_i^{(l+1)}$ le ième vecteur et valeur propres obtenus dans la dernière itération « l ».

ii. Méthode d'itération sur sous espace

Initialement développée par BATHE pour améliorer les propriétés de convergence de la méthode d'itération inverse

Largement utilisée pour calculer les « p » premières solutions propres

03 principes:

- 1. Générer « q » vecteurs initiaux, ($q < p$ où p est le nbr de couples propres recherché)**
- 2. Effectuer une itération inverse simultanée sur « q » vecteurs et une analyse de Ritz pour extraire les meilleures approximations des valeurs et vecteurs propres qu'on peut obtenir à partir des « q » vecteurs donnés par itération inverse**
- 3. Après convergence de l'itération, utiliser le test de la séquence de Sturm pour vérifier que les valeurs propres requises et leurs vecteurs propres ont été correctement calculés**

Exposons d'abord la méthode de Ritz

Ritz:

Permet de transformer un pb de valeurs propres de grande dimension en un pb de dimension plus réduite. On utilisera ensuite la méthode de Jacobi pour déterminer les solutions propres du système réduit.

Vecteur propre $\{\phi\}$ combinaison linéaire de « q » vecteurs de Ritz

$$\{\phi\} = a_1\{\psi_1\} + a_2\{\psi_2\} + \dots + a_q\{\psi_q\} \quad (10.106)$$

$$\{\phi\} = [\{\psi_1\} \quad \{\psi_2\} \quad \dots \quad \{\psi_q\}] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix} \quad (10.107)$$

(nx1)

(nxq)

(qx1)

$$\{\phi\} = [\Psi]\{a\} \quad (10.108)$$

On cherche les « a_i » pour que $\{\phi\}$ soit proche d'un vecteur propre du système initial

On cherche les « a_i » pour que $\{\phi\}$ soit proche d'un vecteur propre du système initial

On cherche à rendre stationnaire le quotient de Rayleigh

$$R(\{X\}) = \frac{\{X\}^T [K] \{X\}}{\{X\}^T [M] \{X\}} = \frac{\{a\}^T [\bar{K}] \{a\}}{\{a\}^T [\bar{M}] \{a\}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (10.109)$$

avec

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= [\Psi]^T [K] [\Psi] & (q \times q) \\ [\bar{M}] &= [\Psi]^T [M] [\Psi] & (q \times q) \end{aligned} \quad (10.110)$$

Ou bien

$$R(\{X\}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q a_i a_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q a_i a_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (10.111)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{ij} &= \{\psi_i\}^T [K] \{\psi_j\} \\ \tilde{m}_{ij} &= \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_j\} \end{aligned} \quad (10.112)$$

Cas stationnaire
 $i=1, 2, \dots, q$

$$\frac{\partial R(\{X\})}{\partial a_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q a_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{i=1}^q a_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} = 0 \quad (10.113)$$

En posant $\rho = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}$ la condition d'avoir un $R(\{X\})$ minimum sera

$$\sum_{j=1}^q (\tilde{k}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) a_j \quad i=1, 2, \dots, q \quad (10.114)$$

Sous forme matricielle

$$\underset{(q \times q)}{[\bar{K}]} \{a\} = \rho \underset{(q \times q)}{[\bar{M}]} \{a\} \quad (10.115)$$

La solution de (10.115) donne « q » valeurs propres approximations de « λ_i » ($i=1, 2, \dots, q$) et « q » vecteurs propres $\{a_i\} = [a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_q^i]^T$

$\{a_i\}$ seront utilisés pour calculer des vecteurs $\{\bar{\phi}_1\}, \dots, \{\bar{\phi}_q\}$ des approximations de l'initial $\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_q\}$

Remplaçons dans (10.106) $\{\phi\} = a_1\{\psi_1\} + a_2\{\psi_2\} + \dots + a_q\{\psi_q\}$

$$\{\bar{\phi}_i\} = a_1^i\{\psi_1\} + a_2^i\{\psi_2\} + \dots + a_q^i\{\psi_q\} \quad i=1, 2, \dots, q \quad (10.116)$$

Les vecteurs de Ritz génèrent un sous espace qui contient les valeurs propres recherchées.

Une manière de prendre de bons vecteurs de Ritz est de considérer les solutions du pb statique

$$[K]\{\psi_i\} = \{F_i\} \quad i=1, 2, \dots, q \quad (10.117)$$

Où $\{F_i\}$ les vecteurs unités qui sollicitent les degrés de liberté « j » correspondant aux plus petites valeurs du rapport : k_{ij}/m_{ij}

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \longleftarrow \text{Ligne « j »}$$

La méthode du sous espace

Ça consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse

Ritz force les vecteurs $\{\phi\}$ à rester orthogonaux entre eux et l'itération inverse ajuste la base vectorielle de Ritz de manière à assurer la convergence des vecteurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres.

Algorithme de la méthode du sous espace

Avec « n » dimension du pb initial et « p » nb de solutions propres désirées ($p \leq n$). On aura:

a) Choisir « q » vecteurs (nx1) initiaux, $q \geq p$

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \dots \quad \{\phi_q\}] \quad (10.118)$$

b) Effectuer une itération inverse pour calculer simultanément les « q » vecteurs de Ritz $\{\psi_i\}$ en résolvant:

avec

$$\begin{aligned} [K]\{\psi_i\} &= \{F_i\} & i=1, 2, \dots, q \\ \{F_i\} &= [M]\{\phi_i\} \end{aligned} \quad (10.119)$$

Sous forme condensée

$$[K][\Psi] = [M][\Phi] \quad (10.120)$$

Algorithme de la méthode du sous espace

- c) Appliquer la méthode de Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous espace de Ritz
- i. Calculer les projections des matrices $[K]$ et $[M]$ dans le sous espace

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= [\Psi]^T [K] [\Psi] & (q \times q) \\ [\bar{M}] &= [\Psi]^T [M] [\Psi] & (q \times q) \end{aligned} \quad (10.121)$$

- ii. Utiliser la méthode de Jacobi (ou Householder QR itération inverse) pour résoudre le pb propre

$$([\bar{K}] - \lambda[\bar{M}])\{a\} = 0$$

On obtient des « λ_i » ($i=1,2,\dots,q$) approximations des plus petites valeurs propres du système initial et « q » vecteurs propres $\{a_i\}$ pour calculer les approximations $\{\bar{\phi}_1\}, \dots, \{\bar{\phi}_q\}$ de l'initial $\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_q\}$

- d) Tester la convergence des « λ_i » ($i=1,2,\dots,q$) et répéter si nécessaire les opérations b, c et d.

Algorithme de la méthode du sous espace

La méthode converge vers les « p » plus petites valeurs propres à condition que les « q » vecteurs initiaux $\{\phi_i\}$ ne soient pas M-orthogonaux à l'un des vecteurs propres recherché.

On s'assure que ce sont les plus petites valeurs propres en utilisant le test de Sturm en décomposant la matrice $([K] - (\lambda_p + \varepsilon)[M])$ en $[L][D][L]^T$ et vérifier qu'il ya « p » valeurs négatives dans $[D]$. ($\varepsilon \approx 10^{-2}$ à 10^{-3})

Rems

$[\bar{K}]$ et $[\bar{M}]$ tendent vers des matrices diagonales ce qui augmente l'efficacité de Jacobi en étape c) ii/ de l'algorithme.

« q » est > « p » la convergence est plus rapide. Proposition $q = \text{Min}(P+8 \text{ et } 2p)$

Généralement, les vecteurs initiaux sont choisis comme suit:

$\{\phi_1\}$ est aléatoire, les autres

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Ligne } \ll i_1 \gg$$
$$\{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Ligne } \ll i_2 \gg$$

i_1, i_2, \dots, i_{q-1} sont les indices « i » correspondants aux plus petites valeurs successives de k_{ij}/m_{ij}

Résumé de l'algorithme de la méthode du sous espace

Factoriser la matrice $[K]$ en $[L][D][L]^T$

Choisir « q » vecteurs (nx1) initiaux, $q \geq p$ de $\{X_1\}$ et $\lambda_1=1$

Soit. $\{Y_1\} = [M] \{X_1\}$

Pour chaque itération $k=1, 2, \dots$ on évalue

1. $(K)\{\bar{X}_{k+1}\} = \{Y_k\}$
2. $[K_{k+1}] = \{\bar{X}_{k+1}\}^T \{Y_k\}$
3. $\{\bar{Y}_{k+1}\} = [M] \{\bar{X}_{k+1}\}$
4. $[M_{k+1}] = \{\bar{X}_{k+1}\}^T \{\bar{Y}_{k+1}\}$
5. $[K_{k+1}][Q_{k+1}] = [M_{k+1}][Q_{k+1}][\Omega_{k+1}]$
6. $\{Y_{k+1}\} = \{\bar{Y}_{k+1}\}[Q_{k+1}]$
7. $[X_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}][Q_{k+1}]$
8. **Vérification de la séquence de STURM**
9. $[\bar{K}] = [K] - \mu_k[M]$
10. **Factoriser $[\bar{K}]$ en $[L][D][L]^T$**
11. **Test de convergence (calcul d'erreurs)**

$$\varepsilon_i = \frac{\| [K] \{ \Phi_i \}^{(i+1)} - \lambda_i^{(i+1)} [M] \{ \Phi_i \}^{(i+1)} \|_2}{\| [K] \{ \Phi_i \}^{(i+1)} \|_2}$$

Quelques propriétés des systèmes propres

Méthode du sous espace

$$\begin{aligned}
 [K]\{\bar{X}_{k+1}\} &= [M]\{X_k\} \\
 [K_{k+1}] &= \{\bar{X}_{k+1}\}^T (K) \{\bar{X}_{k+1}\} \\
 [M_{k+1}] &= \{\bar{X}_{k+1}\}^T (M) \{\bar{X}_{k+1}\}
 \end{aligned}$$

Exemple 8(*)

Soient les matrices $[K]$ et $[M]$ suivantes.
Utiliser la méthode du sous espace pour calculer $\lambda_1, \{\phi_1\}$ et $\lambda_2, \{\phi_2\}$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{k+1}][Q_{k+1}] = [M_{k+1}][Q_{k+1}][\Omega_{k+1}]$$

$$[X_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}][Q_{k+1}]$$

$$[X_{k+1}] \longrightarrow [\Phi]$$

$$[\Omega_{k+1}] \longrightarrow [\Omega]$$

k tend vers l'infini

Choisir « q =2 » vecteurs de départ

$$\{X_1\} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Soit} \quad [K][\bar{X}_{k+1}] = [M][X_k] \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} [\bar{X}_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La résolution du système donne: $[\bar{X}_2] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 [K_{k+1}] &= \{\bar{X}_{k+1}\}^T (K) \{\bar{X}_{k+1}\} \\
 [M_{k+1}] &= \{\bar{X}_{k+1}\}^T (M) \{\bar{X}_{k+1}\}
 \end{aligned}$$

Passer au sous espace (2x2)



$$\begin{aligned}
 [K_2] &= \{\bar{X}_2\}^T (K) \{\bar{X}_2\} \\
 [M_2] &= \{\bar{X}_2\}^T (M) \{\bar{X}_2\}
 \end{aligned}$$

$$[K_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

On résout le pb propre par n'importe quelle méthode (Jacobi, householder,...)

$$[K_2][Q_2] = [M_2][Q_2][\Omega_2]$$

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 1 & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Omega_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre final sera:

$$[X_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}][Q_{k+1}] \quad [X_2] = [\bar{X}_2][Q_2]$$

$$[X_2] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 1 & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Merci. Fin du chapitre 10

Dynamique des structures

Abdellatif MEGNOUNIF

Prochain Cours

Chap. 11

Vibration forcée des SPDDL