Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 7

Vibrations forcées

Excitation Impulsive Sinusoïdale

Exemple 7 **Jeudi 04.01.2024**

Objectif

Le but de cette application est de calculer la réponse d'un système à un seul degré de liberté soumis à une excitation de type impulsive sinusoïdale.

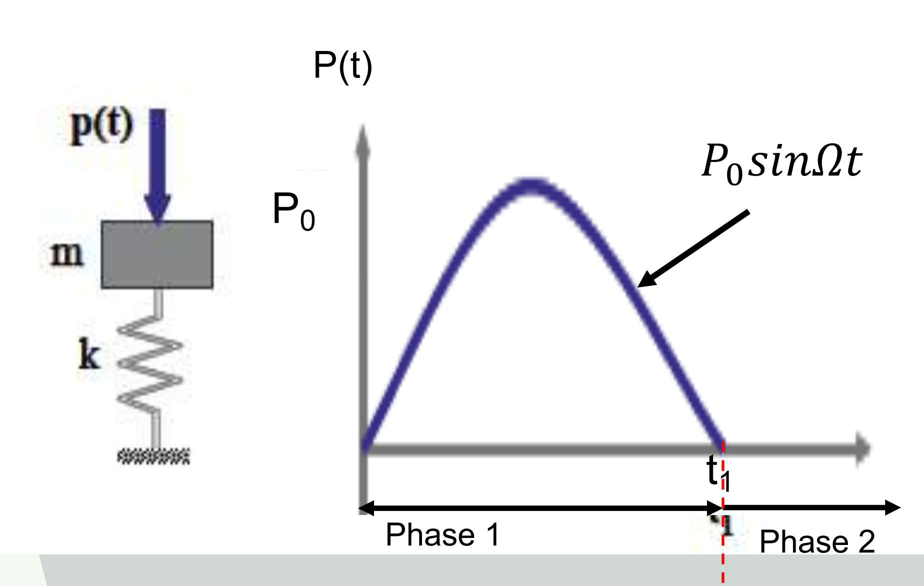
Qu'est ce que c'est une excitation impulsive et les différents types ?

Etablissement des équations du mouvement

Recherche de l'instant où se produit le déplacement maximal.

Exemple 1

On donne un système à un seul DDL soumis à la force montrée en figure ci-dessous.



i. Dans le cas général, déterminer la réponse maximale pour les 02 cas suivants:
   a) Cas 1 : r=2/3
   b) Cas 2 : r=4/3

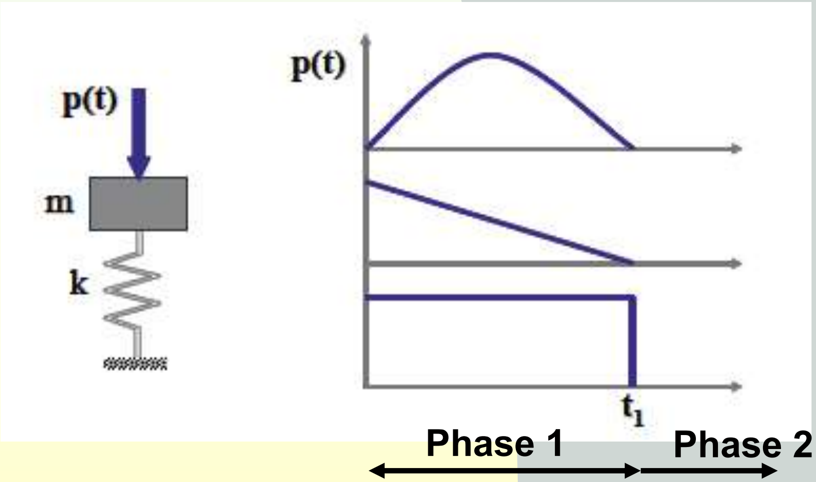
ii. Avec les données numériques m=300 kg ; K=1,75 10^5 N/m ; P_0 = 2500 N et t_1 = 0,15 s
   a) Déterminer l'instant où P(t) produit la réponse maximale.
   b) Calculer la force de rappel élastique maximale produite par le chargement.

Solution

Rappel (Voir chapitre 5 §5)

Excitation impulsive ?

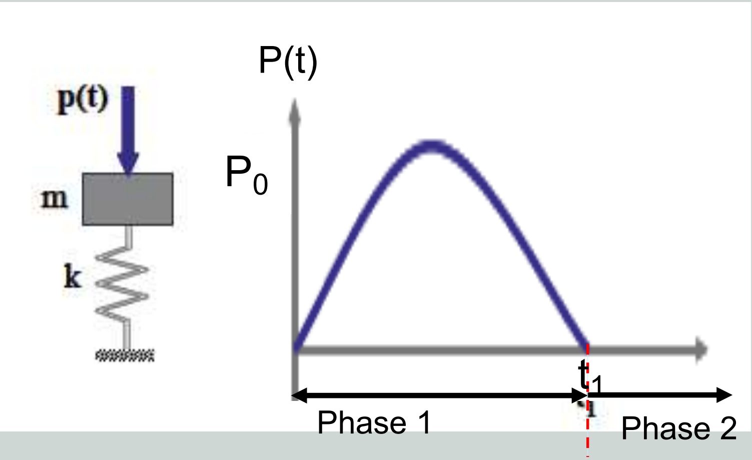
- **Elle ne se répète pas dans le temps.**
- **Elle est de très courte durée.**
- **L'amortissement n'aura pas le temps de se développer durant l'excitation.**
- **Il y a toujours 02 phases: La 1ère le système est forcé par une excitation très courte et la 2ème le système est en oscillations libres due au déplacement et la vitesse finaux de la 1ère phase.**
- **Elle peut prendre des formes variées, sinusoïdale, triangulaire, rectangulaire…**



Ex. Choc/Impact du à une collision, une explosion, joints du pont, parcs d'attraction...

Solution

Cas de l'impulsion sinusoïdale



Phase 1: $t \leq t_1$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Système soumis à une force harmonique de type sinus (impulsion): C=0 et p(t)= $P_0 sin\Omega t$

D'où: $$m\,\ddot{u}_1(t) + ku_1(t) = P_0 sin\Omega t$$

Solution : (Voir Chap 3) : $u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Avec: $u_c(t) = [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$ $\quad u_p(t) = \dfrac{P_0}{k}\dfrac{1}{1-r^2}sin(\Omega t) = \dfrac{P_0}{k}Dsin(\Omega t)$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}Dsin(\Omega t) + [(A\,cos\omega_0 t + B\,sin\omega_0 t)]$$

Soit les CI: $u_1(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$ **En remplaçant, on obtiendra:**

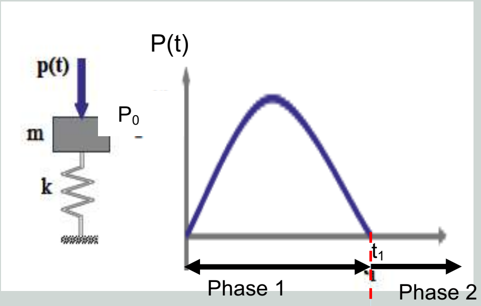
$$u_1(t) = (u_0)\,cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} - r\frac{P_0}{k}D\right) sin\omega_0 t + \frac{P_0}{k}Dsin\Omega t \qquad \textbf{(1)}$$

Si le système est au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

D'où $$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t - r\,sin\omega_0 t) \qquad \textbf{(2)}$$

Solution

Impulsion sinusoïdale



Réponse maximale en phase 1 ?

Prenons le cas simple où le système est au repos: $u_1(0) = 0$ *et* $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t - r\sin\omega_0 t) \qquad \textbf{(2)}$$

Pour obtenir la max. on annule la dérivée % temps

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\Omega\cos\Omega t - r\omega_0\cos\omega_0 t) = 0$$

Soit $\cos\Omega t = \cos\omega_0 t$ **D'où** $\Omega t = 2\pi n \pm \omega_0 t$ **(3)**

Pour $t \leq t_1$ **or** $t_1 = T_p/2$ **d'où** $\Omega t \leq \pi$

En considérant le 1er terme de l'équation (3)

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0} \qquad \textbf{(4)}$$

où $t_{max} \leq t_1$ **i.e** $r < 1$

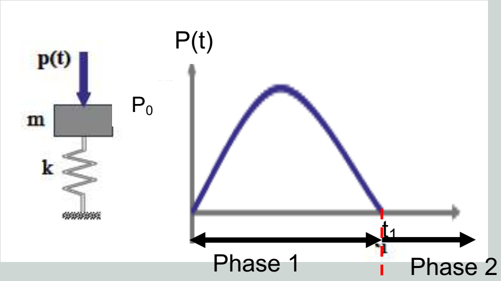
En remplaçant (4) dans (2), on aura:

pour $r < 1$

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max}) \qquad \textbf{(5)}$$

Solution

Impulsion sinusoïdale



Phase 2: t $\geq$ t$_1$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Système en oscillations libres dues au déplacement et vitesse finaux de la phase 1. c=0 et p(t)=0

D'où: $m\ddot{u}_2(t) + ku_2(t) = 0$

Avec CI: $u_2(t_1) = u_1(t_1) = u_{t1}$ *et.* $\dot{u}_2(t_1) = \dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_{t1}$

Si on suppose que le système est au repos: $u_1(0) = 0$ *et* $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\,cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad \textbf{(6)}$$

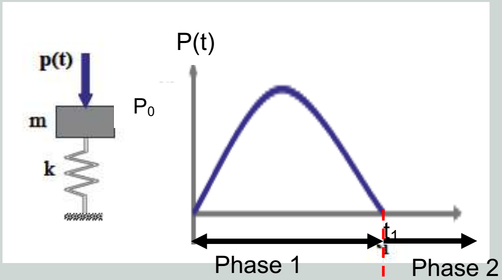
Où. u_{t1} **et** $\dot{u}_{t1}$ **sont obtenus en utilisant l'éq. (2) pour « t=t$_1$ »**

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t - r sin\omega_0 t) \qquad \dot{u}_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1-r^2}(cos\Omega t - cos\omega_0 t)$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) \quad \textbf{et} \quad \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1-r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) \quad \textbf{(7)}$$

Solution

Impulsion sinusoïdale



$$u_2(t) = \left[u_{t1}\,cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right) sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad \textbf{(6)}$$

$$u_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) \quad \dot{u}_1(t_1) = \frac{P_0}{k}\frac{\Omega}{1-r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) \quad \textbf{(7)}$$

En remplaçant (7) dans (6)

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t_1 - r sin\omega_0 t_1) cos\omega_0(t-t_1) + \frac{P_0}{k}\frac{r}{1-r^2}(cos\Omega t_1 - cos\omega_0 t_1) sin\omega_0(t-t_1)\right] \quad \textbf{(8)}$$

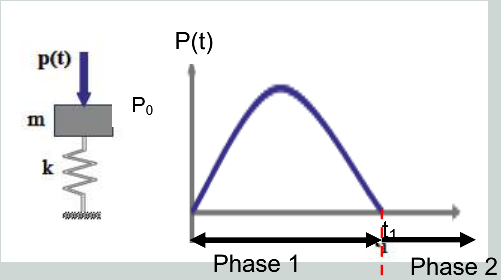
La réponse maximale en phase 2, sera:

$$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2} = \frac{P_0}{k}\frac{r}{1-r^2}\sqrt{\left[2 + 2cos\frac{\pi}{r}\right]} \quad \textbf{pour} \quad r > 1 \quad \textbf{(9)}$$

$$D = \frac{u_{2max}}{u_{stat}} = \frac{2r}{1-r^2} cos\frac{\pi}{2r} \quad \textbf{(10)}$$

Solution

Impulsion sinusoïdale



Ainsi, en résumé si

$r \leq 1$ **La réponse maximale est en phase 1**

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max}) \quad \textbf{avec} \quad t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega+\omega_0}$$

$r \geq 1$ **La réponse maximale est en phase 2**

$$u_{2max} = \frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}$$

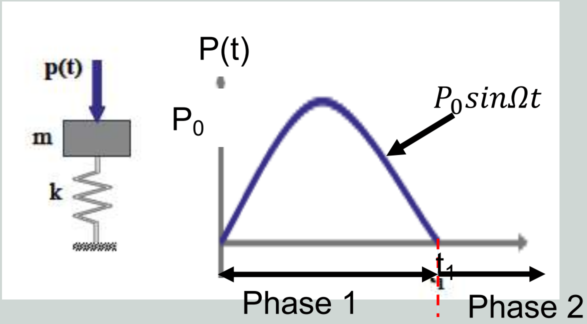
De même, on peut remarquer que

$$D = \frac{u_{max}}{u_{stat}} = f\left(\frac{t_1}{T}\right)$$

Solution

Notre cas

i. Dans le cas général, déterminer la réponse maximale pour les 02 cas suivants:
   a) Cas 1 : r=2/3
   b) Cas 2 : r=4/3



Cas 1 : r=2/3

r=2/3 i.e $r < 1$

Réponse est en phase 1

Pour : $r < 1$; $t \leq t_1$ d'où $t_1 = T_p/2$

d'où $\Omega t_1 = \pi$ ➡

$$t_1 = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{r\,\omega_0} = \frac{T_0}{r\,2} = \frac{T_0}{\frac{2}{3}\,2} = \frac{3T_0}{4} > \frac{T_p}{2} \qquad (t_1 < T_p/2)$$

Phase 1 Avec CI au repos: $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_1(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t \text{ - } r sin\omega_0 t)$$

et

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin \Omega t_{max} \text{ - } r \sin \omega_0 t_{max})$$

avec $t_{max} = \dfrac{2\pi}{\Omega + \omega_0}$

Solution

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin \Omega t_{max} - r \sin \omega_0 t_{max})$$ **avec** $$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0}$$

Ainsi

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega+\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{1+\Omega/\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{1+r} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{1+2/3} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}T_0$$

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0} \Rightarrow \Omega t_{max} = 2\pi - \omega_0 t_{max} = 2\pi - \omega_0 \frac{3}{5} T_0 = 2\pi - \frac{2\pi}{T_0}\frac{3}{5} T_0$$

$$\Omega t_{max} = 2\pi\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi$$

$$\omega_0 t_{max} = \frac{2\pi}{T_0} t_{max} = \frac{2\pi}{T_0}\frac{3}{5} T_0 = \frac{6}{5}\pi$$

D'où

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max})$$

$$u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-2/32}\left(\sin\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{3}\sin\frac{6}{5}\pi\right) = 1,77\frac{P_0}{k}$$

$$D = \frac{u_{1max}}{u_{stat}} = \frac{1}{1-r^2}(\sin \Omega t_{max} - r \sin \omega_0 t_{max}) = 1,77$$

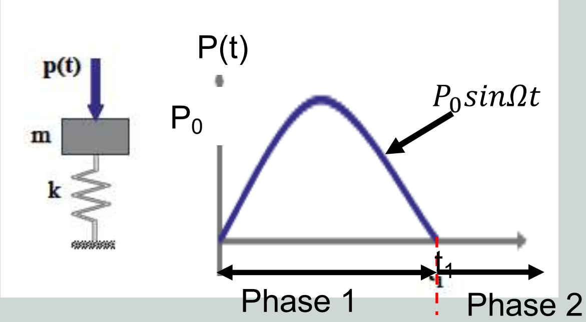
Solution **Notre cas**

i. Dans le cas général, déterminer la réponse maximale pour les 02 cas suivants:

a) Cas 1 : r=2/3

b) Cas 2 : r=4/3

Cas 2 : r=4/3   r=4/3 i.e $r > 1$



Réponse est en phase 2

Pour : $r > 1$; $t > t_1$ d'où $t_1=T_p/2$

d'où $\Omega t_1 = \pi$ ➡

$$t_1 = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{r\,\omega_0} = \frac{T_0}{r\,2} = \frac{T_0}{\frac{4}{3}\,2} = \frac{3T_0}{8} < \frac{T_p}{2} \qquad (t_1 > T_p/2)$$

Avec CI au repos de la phase 1 : $u_1(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = 0$

$$u_2(t) = \left[u_{t1}\cos\omega_0(t-t_1) + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)\sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

$$u_2(t) = \left[\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_1 - r\sin\omega_0 t_1)\cos\omega_0(t-t_1) + \frac{P_0}{k}\frac{r}{1-r^2}(\cos\Omega t_1 - \cos\omega_0 t_1)\sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

D'où $$u_{2max} = \sqrt{(u_{t1})^2 + \left(\frac{\dot{u}_{t1}}{\omega_0}\right)^2} = \frac{P_0}{k}\frac{r}{1-r^2}\sqrt{\left[2+2\cos\frac{\pi}{r}\right]}$$

$$u_{2max} = \frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}$$

Solution

Notre cas

Cas 2 : r=4/3

$$u_2(t)=\left[\frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_1 - r\sin\omega_0 t_1)\cos\omega_0(t-t_1)+\frac{P_0}{k}\frac{r}{1-r^2}(\cos\Omega t_1-\cos\omega_0 t_1)\sin\omega_0(t-t_1)\right]$$

$$u_{2max}=\frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}$$

$$u_{2max}=\frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}=D.\frac{P_0}{k}$$

Avec $D=\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}$

$$u_{2max}=\frac{P_0}{k}\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}=\frac{P_0}{k}\frac{2\,4/3}{1-4/32}\cos\frac{\pi}{2\,4/3}=\frac{P_0}{k}(-1{,}31)$$

$$D=\left|\frac{2r}{1-r^2}\cos\frac{\pi}{2r}\right|=1{,}31$$

D'où

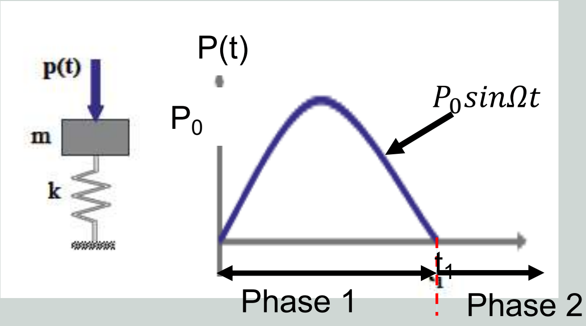
Solution Notre cas

ii. Avec les données numériques m=300 kg ; K=1,75 10^5 N/m ; P_0 = 2500 N et t_1 = 0,15 s

a) Déterminer l'instant où P(t) produit la réponse maximale.

b) Calculer la force de rappel élastique maximale produite par le chargement.

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\frac{2\pi}{T_p}}{\omega_0} = \frac{\frac{\pi}{t_1}}{\omega_0} = \frac{\pi}{t_1\omega_0}$$



Or $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}75\ 10^5}{300}} = 24,15\ rd/s$ **D'où** $r = \frac{\pi}{t_1\omega_0} = \frac{\pi}{0,15\ 24,14} = 0,86$

r=0,86 i.e $r < 1$ **Réponse est en phase 1**

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega+\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{1+\Omega/\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}\ \frac{1}{1+r} = \frac{2\pi}{24{,}15}\ \frac{1}{1+0{,}86} = 0,139\ s$$

Avec:

$$\boxed{u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(sin\Omega t_{max}\text{-}rsin\omega_0 t_{max})}$$

Solution

Notre cas

Calculer la force de rappel élastique maximale produite par le chargement.

Avec $t_{max} = 0,139\ s$

On a $u_{1max} = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max})$

La force de rappel élastique maximale sera :

$$F_{emax} = k.u_{1max} = P_0\frac{1}{1-r^2}(\sin\Omega t_{max} - r\sin\omega_0 t_{max})$$

$$F_{emax} = 2500\frac{1}{1-0{,}862}(\sin 20,94\ 0,139 - 0,86\sin 24,15\ 0,139)$$

Avec $\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{\pi}{t_1} = \frac{\pi}{0{,}15} = 20{,}94\ rd/s$

$$\boxed{F_{emax} = 3961\ N}$$

Merci. Fin de l'Application 7