Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF
E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Application 1

Vibrations libres non amorties

Exemple 1 **Lundi 01.01.2024**

Introduction

Le but de ces applications est de calculer les caractéristiques propres d'un système à un seul degré de liberté. On présentera 02 applications différentes

Définition de la rigidité et de la flexibilité

Rappel : Calcul des déplacements par la méthode de multiplication des diagrammes.

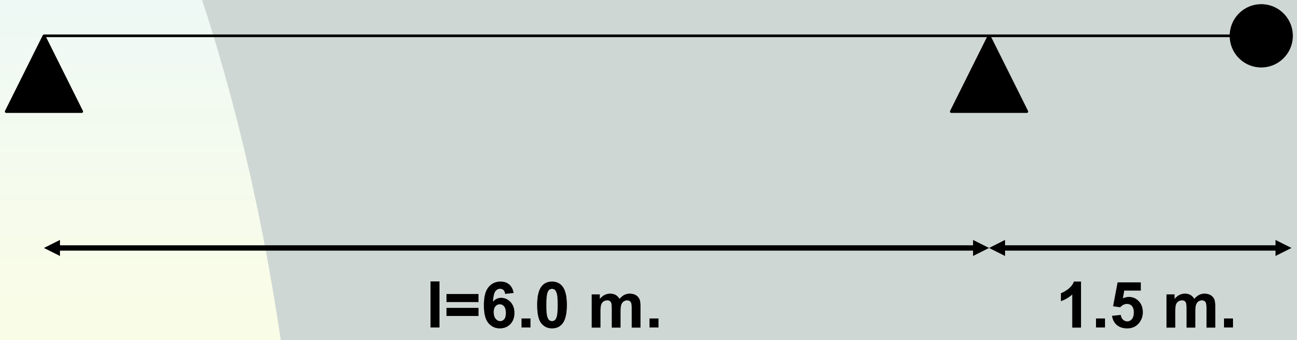
Relations entre pulsation, fréquence et période propres.

Exemple 1

Soit la poutre à console indiquée ci-dessous soumise à l'action d'une charge gravitationnelle Q=mg.

Trouver ω_0, f_0 et T_0 (caractéristiques propres du système).

A.N : E.I = 2500 tf.m^2, l=6.0 m. et Q =4 tf



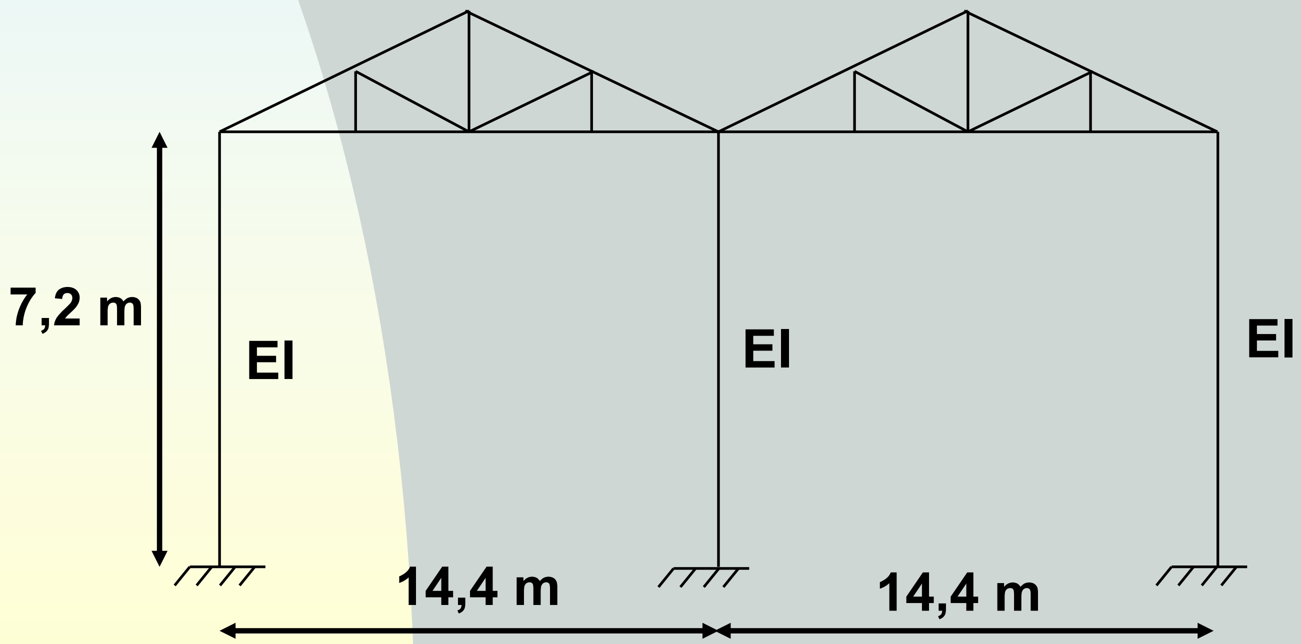
Exemple 2

On considère le hall industriel suivant qui peut être modélisé en un système à 1SDDL.

Trouver ω_0, f_0 et T_0 pour deux cas de fixation différentes. Les poutres en treillis sont:

- 1er cas: articulées aux poteaux
- 2ème cas : encastrées aux poteaux

A.N : E.I = 6000 tf.m2 , Q=30 tf et h=7,20 m



Solution

Rappel (Voir chapitre 3)

Equation du mouvement générale du SSDDL

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \qquad (1)$$

En supposant, un mouvement libre non amorti (mouvement naturel),
On pose c=0 et p(t) = 0.

On aura $$\boxed{m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0} \qquad (2)$$

Solution, Soit $$u(t) = \rho \cos(\omega_0 t - \theta) \qquad (3)$$

Ou bien $$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad (4)$$

ρ, θ ou A, B : constantes à déterminer par les conditions initiales.

θ : Angle de déphasage entre la réponse et l'excitation

Solution

Divisons l'équation (2) par « m »: $m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$

On aura:

$$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ **Ou** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (rd/s) **(5)**

Appelée pulsation propre du système.

On peut avoir alors:

La fréquence propre du système: $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ **(6)**

(cycles/s), Hertz

La période propre du système:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ (s) **(7)**

k ????

Solution

k ????

On sait que :

$$F = k \ \delta$$

Force — Rigidité — Déplacement

Rigidité (k) : Force due à un déplacement unitaire

On peut généraliser : (cas de plusieurs DDL)

Rigidité (k_{ij}) : Force en « i » due à un déplacement unitaire en « j » lorsque tous les autres déplacements sont nuls.

Solution

L'inverse de k ? ? ? ?

Si : $F = k \; \delta$

On peut calculer: $\delta = F/k$

Ou bien : $\delta = f \; F$ Avec : $f = 1/k$

Déplacement Flexibilité Force

Flexibilité (f) : déplacement du à une force unitaire

On peut généraliser : (cas de plusieurs DDL)

Flexibilité (f_{ij}) : Déplacement en « i » du à une force unitaire en « j » lorsque toutes les autres forces sont nulles.

Solution

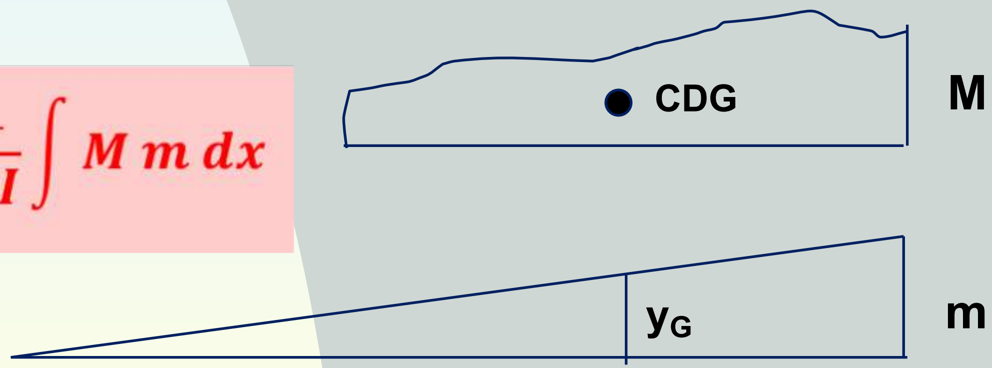
Souvent pour calculer « k », on passe par « f » ?

On calcule un déplacement

Exemple : Méthode de multiplication des diagrammes

Rappel

$$x_{st} = \frac{1}{EI}\int M\,m\,dx$$



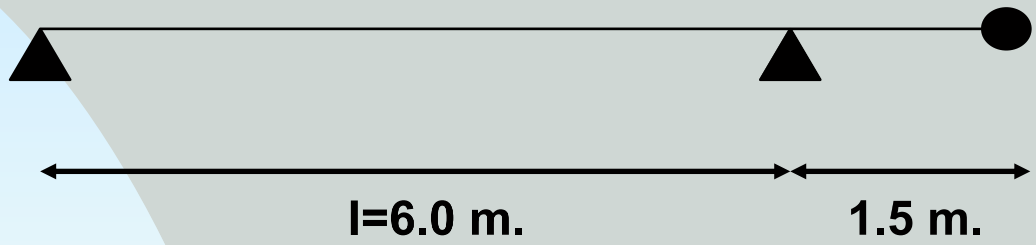
$$x_{st} = \frac{1}{EI}A.y_G$$

A : Aire du diagramme (M)

y_G : Ordonnée sur diagramme (m) correspondant à la position du CDG de (M)

Solution

1er exemple



A.N : E.I = 2500 tf.m^2, l=6.0 m. et Q =4 tf

Ainsi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m.f}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{Q}{g}.f}} = \sqrt{\frac{g}{Q.f}}$$

Flexibilité (f) : déplacement du à une force unitaire

Q.f= x_{st} : déplacement du à la force Q.

Solution

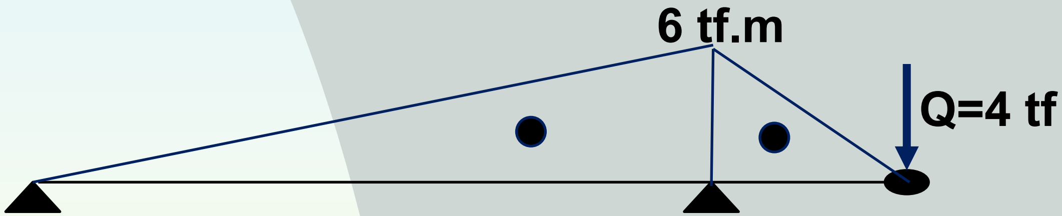
1er exemple

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}$$

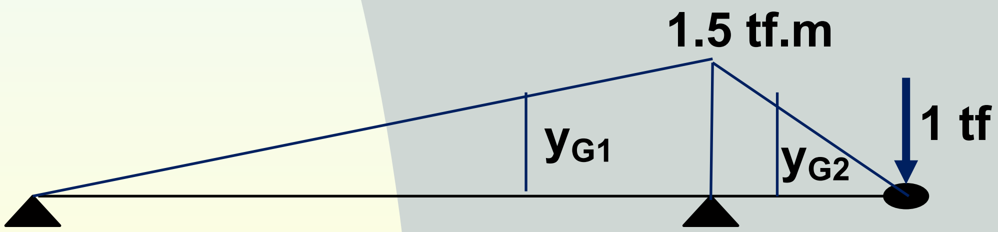
Ainsi

x_{st} ???

$$x_{st} = \frac{1}{EI} A . y_G$$



(M)

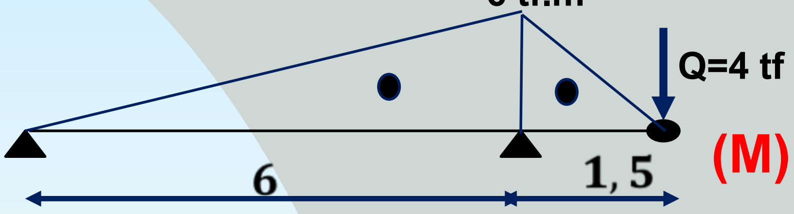


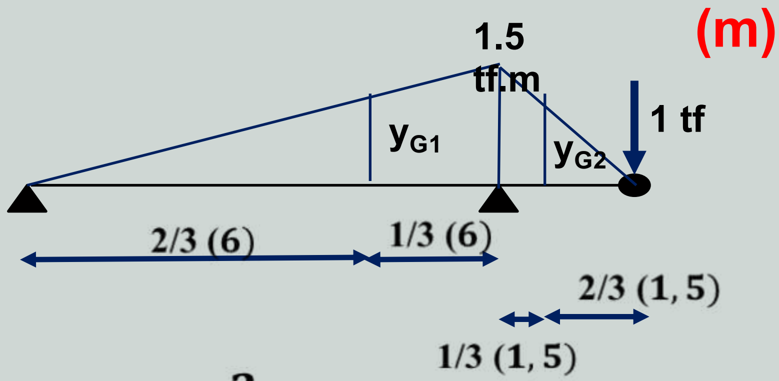
(m)

$$x_{st} = \frac{1}{EI} [(A_1 \, x \, y_{G1}) + (A_2 \, x \, y_{G2})]$$

Solution

1er exemple





$$A_1 = \frac{1}{2}6.6$$

$$A_2 = \frac{1}{2}6\,.\,1,5$$

$$\frac{y_{G1}}{1,5} = \frac{\frac{2}{3}(6)}{6} = \frac{2}{3} \qquad y_{G1} = \frac{2}{3}\,(1,5)$$

$$\frac{y_{G2}}{1,5} = \frac{\frac{2}{3}(1,5)}{1,5} = \frac{2}{3} \qquad y_{G2} = \frac{2}{3}\,(1,5)$$

$$x_{st} = \frac{1}{EI}[(A_1\, x\, y_{G1}) + (A_2\, x\, y_{G2})]$$

$$x_{st} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}6.\,6\ x\ \frac{2}{3}\ (1,5)\right) + \left(\frac{1}{2}6.\,1,5\ x\ \frac{2}{3}\ (1,5)\right)\right]$$

$$x_{st} = \frac{22,5}{EI} = \frac{22,5}{2500}$$

$$\boxed{x_{st} = 0,009\ m}$$

Solution

1er exemple

Ainsi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}$$

Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}009}} \qquad \omega_0 = 33{,}0\ rd/s$$

Fréquence propre

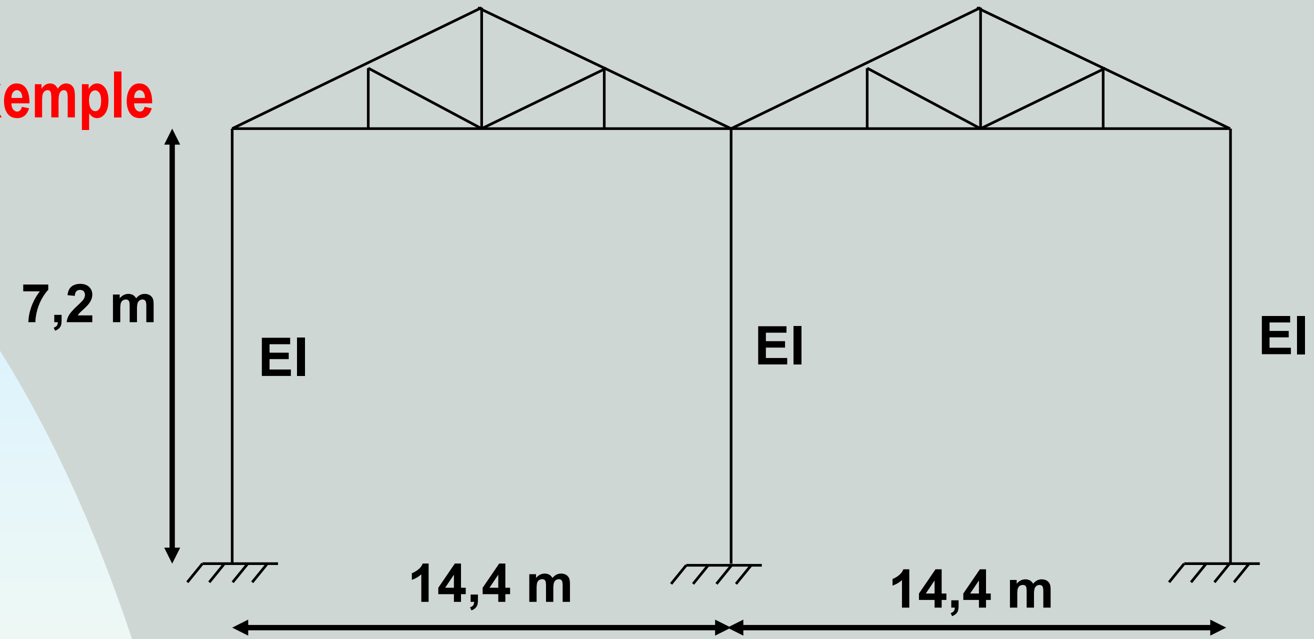
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{33}{2\pi} \qquad f_0 = 5{,}25\ Hz$$

Période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{33} = \frac{1}{5{,}25} \qquad T_0 = 0{,}19\ s$$

Solution

2ème exemple



A.N : E.I = 6000 tf.m², h=7,20 m. et Q =30 tf

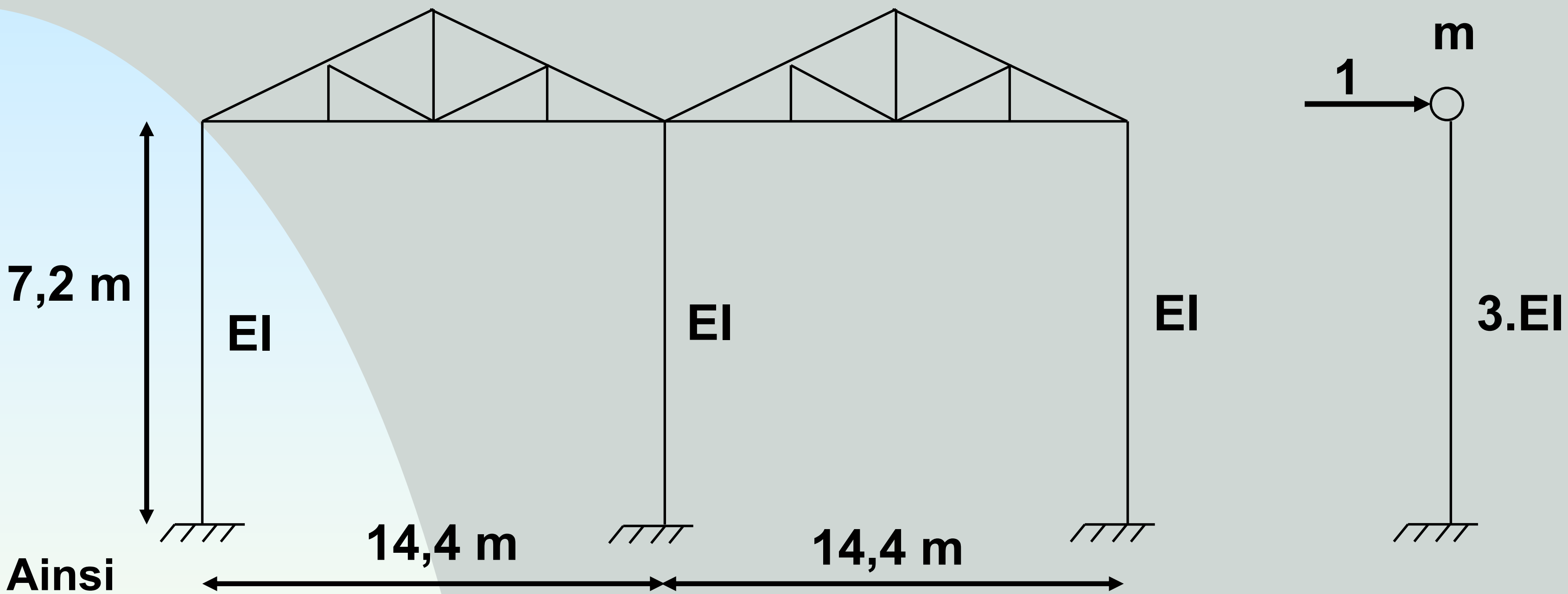
Ainsi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1/f}{Q/G}} = \sqrt{\frac{G}{Q\ f}}$$

Flexibilité (f) : déplacement du à une force unitaire

Solution

Cas 1 : Poutre articulée aux poteaux



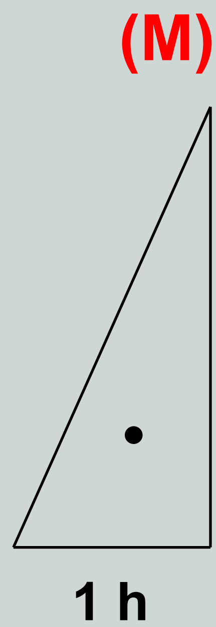
Ainsi

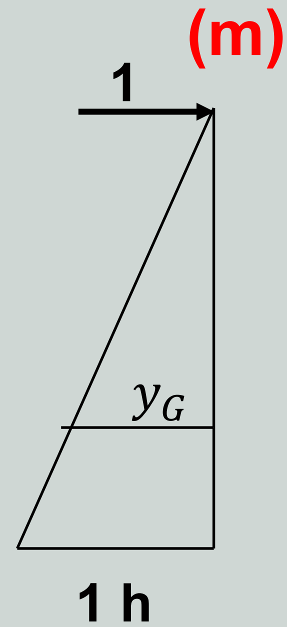
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1/f}{Q/G}} = \sqrt{\frac{G}{Q\,f}}$$

(f) : ????

Solution

Cas 1 : Poutre articulée aux poteaux





$$\frac{y_G}{1.h} = \frac{\frac{2}{3}h}{h} = 2/3$$

Ainsi

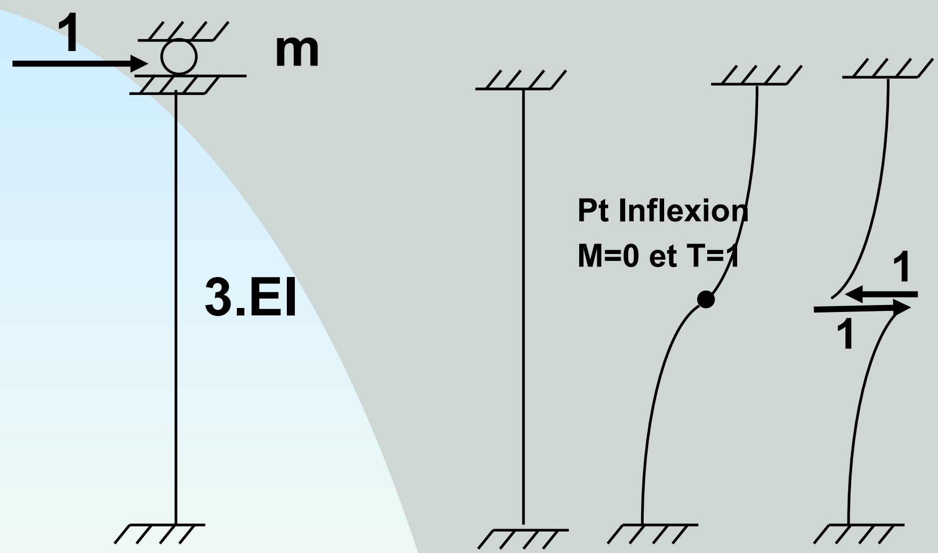
$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{3\,EI}\int M\,m\,dx = \frac{1}{3\,EI}\,A\,y_G \qquad \boldsymbol{f} = \frac{1}{3\,EI}\,½h.\,h\,\frac{2}{3}h = \frac{h^3}{3(3\,EI)} = \frac{7{,}2^3}{9\;\;6000} = \mathbf{0{,}0069}$$

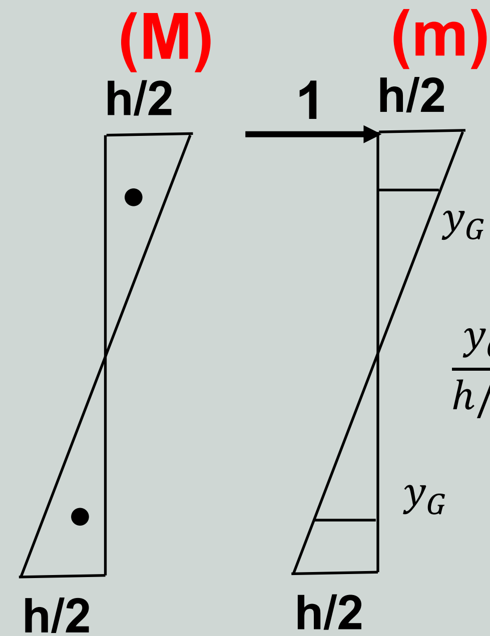
$$\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{G}{Q\,f}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{30\,.\,0{,}0069}} = \mathbf{6{,}88\,rd/s}$$

$$\boldsymbol{f_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \mathbf{1{,}095\,Hz} \qquad \boldsymbol{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = \mathbf{0{,}91\,s}$$

Solution

Cas 2 : Poutre encastrée aux poteaux





$$\frac{y_G}{h/2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{h}{2}}{h/2} = 2/3$$

Ainsi

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{3\,EI}\,A\,y_G \qquad \boldsymbol{f} = 2.\frac{1}{3\,EI}\,½\,\frac{h}{2}\frac{h}{2}.\frac{2}{3}\frac{h}{2} = \frac{h^3}{12(3\,EI)} = \frac{7{,}2^3}{36\,.\,6000} = \mathbf{0,001728}$$

$$\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{G}{Q\,f}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{30\,.\,0{,}001728}} = \mathbf{13,75\,rd/s}$$

$$\boldsymbol{f_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \mathbf{2,19\ Hz} \qquad \boldsymbol{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = \mathbf{0,457\ s}$$

Merci. Fin de l'Application 1