

Dynamique des Structures

Abdellatif MEGNOUNIF

E-mail: abdellatif_megnounif@yahoo.fr

Partie 2: Systèmes à plusieurs DDL.

Application 13

Vibrations Forcées

Calcul par la méthode Pas-à-Pas

Exemple 13 Samedi 13.01.2024

Objectif

Le but de cette application est de :

- ❖ Calculer les réponses dynamiques d'un SPDDL pour des systèmes amortis ou non amortis
- ❖ Utilisation de la méthode pas-à-pas pour la résolution (**Wilson- θ**)
- ❖ Comparaison entre la méthode pas-à-pas et la méthode de superposition modale

Exemple 1

On donne le système à 02 DDL à résoudre dont les équations de mouvement sont définies comme suit :

$$M \ddot{U} + K U = P(t)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

- i) Calculer le vecteur déplacement $\{u(t)\}$ par la méthode de Wilson- θ avec $\theta=1,4$

Utiliser $\Delta t_i = 0,28$

$$\text{CI : } \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- ii) Calculer les déplacements avec la méthode de superposition modale et comparer le résultats.

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t)$$

Méthode Pas-à-Pas

- ❖ Diviser la réponse en intervalle de temps.
- ❖ Calcul de la déformée à la fin du 1^{er} intervalle sur la base des CI et du chargement durant le 1^{er} intervalle.
- ❖ Solution du 1^{er} intervalle devient CI du 2^{ème} intervalle et ainsi de suite jusqu'au temps voulu.
- ❖ A la fin de l'intervalle les caractéristiques sont modifiées.
- ❖ Pas besoin de calculer les fréquences et modes propres de vibration.
- ❖ Valable pour les systèmes élastiques linéaires et les systèmes non linéaires

Existe un problème avec la matrice « C ». Ne peut pas être définie par les facteurs d'amortissement modaux. Elle doit être définie explicitement.

Equations de mouvement incrémentales

Sous forme incrémentale :

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{P}(t) \quad (1)$$

Avec

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{U}}_i &= \ddot{\mathbf{U}}(t_i + \tau) - \ddot{\mathbf{U}}(t_i) \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_i &= \dot{\mathbf{U}}(t_i + \tau) - \dot{\mathbf{U}}(t_i) \\ \Delta \mathbf{U}_i &= \mathbf{U}(t_i + \tau) - \mathbf{U}(t_i) \\ \Delta \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}(t_i + \tau) - \mathbf{P}(t_i) \end{aligned} \quad (2)$$

« τ » dépend de la méthode utilisée.
 $\tau = \Delta t$ pour Newmark- β et accélération linéaire
 $\tau = \theta \Delta t$ pour Wilson- θ

En cas de non linéarité.

- $\mathbf{K}(\mathbf{U})$ et $\mathbf{C}(\dot{\mathbf{U}})$ changent dans le temps (d'un intervalle à un autre) et sont obtenus pour chaque intervalle de temps, les tangentes au début de l'intervalle.
- $\mathbf{M}$ est supposée rester constante dans le temps

Méthodes de résolution Pas-à-Pas

Méthode d'accélération linéaire.

- ❖ Suppose une variation linéaire de l'accélération, donc variation quadratique de la vitesse et cubique du déplacement dans Δt .
- ❖ Méthode que conditionnellement stable.
- ❖ Peut diverger pour de mauvais choix de Δt

Méthode de Newmark- β .

- ❖ Généralisation de l'accélération linéaire
- ❖ Utilise 02 facteurs (β et γ) dans le calcul de $\Delta \ddot{u}_i$
- ❖ Bon choix de β . Newmark propose $1/6 \leq \beta \leq 1/2$
- ❖ $\beta=1/6$: Méthode d'accélération linéaire (que conditionnellement stable)
- ❖ $\beta=1/4$: Vitesse linéaire, d'où accélération moyenne dans Δt . Inconditionnellement stable

Méthode de Wilson- θ .

- ❖ Accélération linéaire sur l'intervalle de temps $\theta \Delta t$
- ❖ Pour une stabilité numérique optimal et une précision $\theta \geq 1.38$
- ❖ Méthode inconditionnellement stable.

Algorithme de la Méthode de Wilson- θ

Accélération linéaire sur l'intervalle « $\theta\Delta t$ »

A. Initialisation

1. Calcul des matrices K , C et M et du vecteur force extérieure.

2. Poser les CI : U_0 , $\dot{U}_0$ et P_0

3. Calculer l'accélération initiale $\ddot{U}_0$

$$\ddot{U}_0 = M^{-1}[P_0 - C\dot{U}_0 - KU_0]$$

4. Choisir un pas de temps « Δt » et « θ » (Généralement $\theta = 1.4$) et calculer les coefficients suivants:

$$\tau = \theta\Delta t; \quad a_1 = \frac{3}{\tau}; \quad a_2 = \frac{6}{\tau}; \quad a_3 = \frac{\tau}{2}; \quad a_4 = \frac{6}{\tau^2};$$

5. Calculer la matrice de rigidité effective

$$\bar{K}_i = K_i + a_4M + a_1C_i$$

B. Pour chaque pas de temps

1. Calculer par interpolation linéaire la charge « ΔP_i » pour l'intervalle $(t_i ; t_i + \tau)$

$$\Delta P_i = P_{i+1} + (P_{i+2} - P_{i+1})(\theta - 1) - P_i$$

2. Calculer la charge effective incrémentale « $\overline{\Delta P}_i$ » pour l'intervalle $(t_i ; t_i + \tau)$

$$\overline{\Delta P}_i = \Delta P_i + M(a_2 \dot{U} + 3\ddot{U}_i) + C_i(3\dot{U}_i + a_3 \ddot{U}_i)$$

3. Résolution du système d'équations linéaires pour calculer ΔU_i

$$\bar{K}_i \Delta U_i = \overline{\Delta P}_i$$

4. Calculer l'accélération incrémentale sur l'intervalle « $\theta \Delta t$ »

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3\ddot{U}_i$$

5. Transformer l'incrément d'accélération sur l'intervalle « Δt »

$$\bar{\Delta \ddot{U}}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta}$$

6. Calculer l'incrément de vitesse « $\Delta \dot{U}_i$ » et l'incrément de déplacement « ΔU_i »

$$\Delta \dot{U}_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta \ddot{U}}_i \Delta t$$

$$\Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta \ddot{U}}_i \Delta t^2$$

7. Calculer le déplacement et la vitesse au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

8. Calculer l'accélération au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

$$\ddot{U}_{i+1} = M^{-1} [P_{i+1} - F_a(\dot{U}_{i+1}) - K_k(U_{i+1})]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Utiliser $\Delta t_i = 0,28$ avec $\theta=1,4$

$$\text{CI : } \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A. Initialisation

1. Calcul des matrices K , C et M et du vecteur force extérieure.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

2. Poser les CI : U_0 , $\dot{U}_0$ et P_0

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad P(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

3. Calculer l'accélération initiale $\ddot{U}_0$ $\ddot{U}_0 = M^{-1}[P_0 - C\dot{U}_0 - KU_0]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \text{D'où} \quad M \ddot{U}_0 + C \dot{U}_0 + K U_0 = P(0)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(0) \\ \ddot{u}_2(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(0) \\ \ddot{u}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

4. Choisir un pas de temps « Δt » et « θ » (Généralement $\theta = 1.4$) et calculer les coefficients suivants:

$$\tau = \theta \Delta t; \quad a_1 = \frac{3}{\tau}; \quad a_2 = \frac{6}{\tau}; \quad a_3 = \frac{\tau}{2}; \quad a_4 = \frac{6}{\tau^2};$$

$$\Delta t_i = 0,28 \quad \text{et} \quad \theta = 1,4$$

$$\tau = \theta \Delta t = 1,4 \cdot 0,28 = 0,392$$

$$a_1 = \frac{3}{\tau} = \frac{3}{0,392} = 7,65$$

$$a_2 = \frac{6}{\tau} = \frac{6}{0,392} = 15,30$$

$$a_3 = \frac{\tau}{2} = \frac{0,392}{2} = 0,196$$

$$a_4 = \frac{6}{\tau^2} = \frac{6}{0,392^2} = 39,05$$

5. Calculer la matrice de rigidité effective $\bar{K}_i = K_i + a_4 M + a_1 C_i$

$$\bar{K}_i = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39,05 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{K}_i = \begin{bmatrix} 84,1 & -2 \\ -2 & 43,05 \end{bmatrix}$$

B. Pour chaque pas de temps

1^{er} pas

1. Calculer par interpolation linéaire la charge « ΔP_i » pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\Delta P_i = P_{i+1} + (P_{i+2} - P_{i+1})(\theta - 1) - P_i$$

$$\Delta P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) (1,4 - 1) - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer la charge effective incrémentale « $\overline{\Delta P_i}$ » pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\overline{\Delta P_i} = \Delta P_i + M(a_2 \dot{U}_i + 3\ddot{U}_i) + Ci(3\dot{U}_i + a_3 \ddot{U}_i)$$

$$\overline{\Delta P_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(15,30 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + 3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \right) + 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

3. Résolution du système d'équations linéaires pour calculer ΔU_i $\bar{K}_i \Delta U_i = \overline{\Delta P_i}$

$$\begin{bmatrix} 84,1 & -2 \\ -2 & 43,05 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0166 \\ 0,697 \end{Bmatrix}$$

B. Pour chaque pas de temps

1^{er} pas

4. Calculer l'accélération incrémentale sur l'intervalle « $\theta \Delta t$ » $\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3\ddot{U}_i$

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{0,392^2} \begin{Bmatrix} 0,0166 \\ 0,697 \end{Bmatrix} - \frac{6}{0,392} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,648 \\ -2,785 \end{Bmatrix}$$

5. Transformer l'incrément d'accélération sur l'intervalle « Δt » $\bar{\Delta} \ddot{U}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta}$

$$\bar{\Delta} \ddot{U}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta} = \frac{1}{1,4} \begin{Bmatrix} 0,648 \\ -2,785 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,463 \\ -1,989 \end{Bmatrix}$$

6. Calculer l'incrément de vitesse « $\Delta \dot{U}_i$ » et l'incrément de déplacement « ΔU_i »

$$\Delta \dot{U}_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2 \quad \text{et} \quad \Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{U}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} 0,28 + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0,463 \\ -1,989 \end{Bmatrix} 0,28^2 = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix}$$

et $\Delta U_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 0,28 + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} 0,28^2 + \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 0,463 \\ -1,989 \end{Bmatrix} 0,28^2 = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix}$

B. Pour chaque pas de temps

1^{er} pas

7. Calculer le déplacement et la vitesse au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

$$\dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix}$$

et

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix}$$

8. Calculer l'accélération au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

$$\ddot{U}_{i+1} = M^{-1} [P_{i+1} - F_a(\dot{U}_{i+1}) - K_k(U_{i+1})]$$

$$\ddot{U}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} - 0 - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0,348 \\ 8,548 \end{Bmatrix}$$

On recommence le 2^{ème} pas de temps avec

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} \rightarrow U_i$$

$$\dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} \rightarrow \dot{U}_i$$

$$\ddot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix} \rightarrow \ddot{U}_i$$

Solution Notre cas ?

B. Pour chaque pas de temps

2^{ème} pas

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} \quad \dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} \quad \ddot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix}$$

1. Calculer par interpolation linéaire la charge « ΔP_i » pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\Delta P_i = P_{i+1} + (P_{i+2} - P_{i+1})(\theta - 1) - P_i$$

$$\Delta P_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) (1,4 - 1) - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer la charge effective incrémentale « $\overline{\Delta P_i}$ » pour l'intervalle $(t_i; t_i + \tau)$

$$\overline{\Delta P_i} = \Delta P_i + M(a_2 \dot{U}_i + 3\ddot{U}_i) + Ci(3\dot{U}_i + a_3 \ddot{U}_i)$$

$$\overline{\Delta P_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(15,30 \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} + 3 \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix} \right) + 0 = \begin{bmatrix} 4,293 \\ 64,2153 \end{bmatrix}$$

3. Résolution du système d'équations linéaires pour calculer ΔU_i $\bar{K}_i \Delta U_i = \overline{\Delta P_i}$

$$\begin{bmatrix} 84,1 & -2 \\ -2 & 43,05 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,293 \\ 64,2153 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0866 \\ 1,4934 \end{Bmatrix}$$

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} \quad \dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} \quad \ddot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix}$$

B. Pour chaque pas de temps

2^{ème} pas

4. Calculer l'accélération incrémentale sur l'intervalle « $\theta \Delta t$ » $\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{\tau^2} \Delta U_i - \frac{6}{\tau} \dot{U}_i - 3\ddot{U}_i$

$$\Delta \ddot{U}_i = \frac{6}{0,392^2} \begin{Bmatrix} 0,0866 \\ 1,4934 \end{Bmatrix} - \frac{6}{0,392} \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} - 3 \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,2345 \\ -5,919 \end{Bmatrix}$$

5. Transformer l'incrément d'accélération sur l'intervalle « Δt » $\bar{\Delta} \ddot{U}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta}$

$$\bar{\Delta} \ddot{U}_i = \frac{\Delta \ddot{U}_i}{\theta} = \frac{1}{1,4} \begin{Bmatrix} 1,2345 \\ -5,919 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,8818 \\ -4,2279 \end{Bmatrix}$$

6. Calculer l'incrément de vitesse « $\Delta \dot{U}_i$ » et l'incrément de déplacement « ΔU_i »

$$\Delta \dot{U}_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2 \quad \text{et} \quad \Delta U_i = \dot{U}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \bar{\Delta} \ddot{U}_i \Delta t^2$$

$$\Delta \dot{U}_i = \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix} 0,28 + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0,8818 \\ -4,2279 \end{Bmatrix} 0,28^2 = \begin{Bmatrix} 0,231 \\ 1,8015 \end{Bmatrix}$$

et $\Delta U_i = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} 0,28 + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix} 0,28^2 + \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 0,8818 \\ -4,2279 \end{Bmatrix} 0,28^2 = \begin{Bmatrix} 0,0448 \\ 0,9857 \end{Bmatrix}$

Solution

Notre cas ?

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} \quad \dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} \quad \ddot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,384 \\ 8,548 \end{Bmatrix}$$

B. Pour chaque pas de temps

2^{ème} pas

7. Calculer le déplacement et la vitesse au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

$$\dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,065 \\ 2,521 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,231 \\ 1,8015 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,296 \\ 4,3225 \end{Bmatrix}$$

et

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,006 \\ 0,366 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,0448 \\ 0,9857 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0508 \\ 1,3517 \end{Bmatrix}$$

8. Calculer l'accélération au temps « $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ »

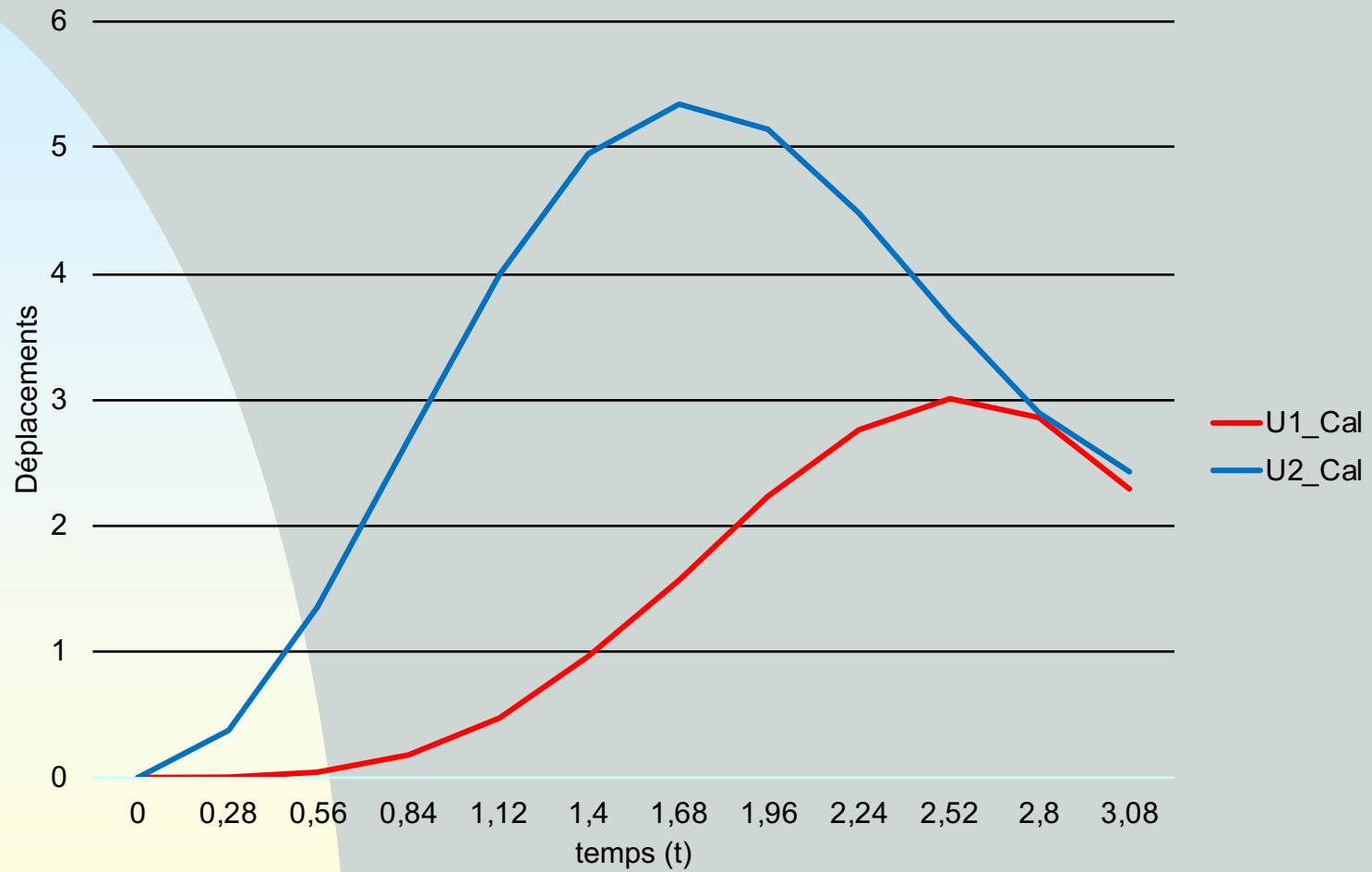
$$\ddot{U}_{i+1} = M^{-1} [P_{i+1} - F_a(\dot{U}_{i+1}) - K_k(U_{i+1})]$$

$$\ddot{U}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} - 0 - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0508 \\ 1,3517 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 1,1993 \\ 4,6948 \end{Bmatrix}$$

On recommence le 3^{ème} pas de temps avec

$$U_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,0508 \\ 1,3517 \end{Bmatrix} \rightarrow U_i \quad \dot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0,296 \\ 4,3225 \end{Bmatrix} \rightarrow \dot{U}_i \quad \ddot{U}_{i+1} = \begin{Bmatrix} 1,1993 \\ 4,6948 \end{Bmatrix} \rightarrow \ddot{U}_i$$

t	P	ΔP	$\overline{\Delta P}$	ΔU_i	$\Delta \ddot{U}$	$\overline{\Delta \ddot{U}}$	$\Delta \dot{U}$	ΔU	U	$\dot{U}$	$\ddot{U}$
0	0	0	0	0,017	0,648	0,463	0,065	0,006	0	0	0
	10	0	30	0,698	-2,758	-1,970	2,524	0,366	0	0	10
Δt	0	0	4,0721	0,084	1,245	0,889	0,222	0,043	0,00605	0,065	0,3481
	10	0	64,2775	1,497	-5,820	-4,157	1,811	0,988	0,36626	2,524	8,5470
$2\Delta t$	0	0	16,0110	0,235	1,174	0,838	0,455	0,139	0,04946	0,287	1,2054
	10	0	80,4092	1,879	-7,045	-5,032	0,607	1,332	1,35377	4,335	4,6838
$3\Delta t$	0	0	35,4334	0,463	0,364	0,260	0,630	0,294	0,18796	0,742	2,1217
	10	0	74,5489	1,753	-6,087	-4,348	-0,711	1,313	2,68552	4,942	-0,3662
$4\Delta t$	0	0	57,3137	0,710	-0,942	-0,673	0,620	0,475	0,48218	1,372	2,5516
	10	0	49,6756	1,187	-3,328	-2,377	-1,741	0,957	3,99820	4,231	-5,0284
$5\Delta t$	0	0	73,4815	0,883	-2,273	-1,623	0,356	0,618	0,95761	1,992	2,0819
	10	0	14,4052	0,376	0,263	0,188	-2,187	0,390	4,95471	2,490	-7,9036
$6\Delta t$	0	0	75,5801	0,889	-3,090	-2,207	-0,136	0,653	1,57586	2,348	0,6170
	10	0	-20,0344	-0,424	3,474	2,481	-1,956	-0,205	5,34461	0,304	-8,2267
$7\Delta t$	0	0	58,4284	0,671	-2,996	-2,140	-0,733	0,531	2,22865	2,212	-1,5464
	10	0	-43,5970	-0,982	5,269	3,764	-1,181	-0,653	5,13953	-1,653	-6,1008
$8\Delta t$	0	0	22,5329	0,240	-1,886	-1,347	-1,250	0,248	2,75937	1,479	-3,7913
	10	0	-50,6615	-1,166	5,143	3,674	-0,166	-0,841	4,48684	-2,834	-2,4286
$9\Delta t$	0	0	-25,2454	-0,324	-0,011	-0,008	-1,506	-0,147	3,00731	0,229	-5,3758
	10	0	-41,6215	-0,982	3,281	2,343	0,728	-0,753	3,64616	-3,000	1,4300
$10\Delta t$	0	0	-73,2359	-0,884	2,093	1,495	-1,384	-0,561	2,86058	-1,277	-5,6888
	10	0	-22,3136	-0,559	0,469	0,335	1,209	-0,469	2,89296	-2,271	4,1493
$11\Delta t$	0	0	-108,3022	-1,290	3,775	2,696	-0,875	-0,885	2,29945	-2,661	-4,4743
	10	0	-1,5527	-0,096	-2,196	-1,569	1,153	-0,126	2,42409	-1,062	4,9026



Solution par la méthode de superposition modale ?

Solution

Calcul des fréquences et modes propres de vibration ?

$$M \ddot{U} + K U = 0$$

Après introduction de la solution: $(K - \omega^2 M)\{\phi\} = 0$

$$\det|K - \omega^2 M| = 0$$

Avec « $\lambda = \omega_i^2$ »

$$\text{D'où : } \det \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6 - 2\lambda)(4 - \lambda) - (-2)(-2) = 0$$

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 = 0$$

Solutions :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \omega_1^2 = 2 \quad \text{D'où : } \omega_1 &= 1,414 \text{ rd/s} \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = 5 \quad \text{D'où : } \omega_2 &= 2,236 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

Equation du mouvement

Modes propres ?

Pour chaque ω_i on résout le système $(K - \omega^2 M)\{\phi\} = 0$

i. $\omega_i = \omega_1 = 1,414 \text{ rd/s}$

$$\begin{bmatrix} 6 - \lambda_1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 - \lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 6 - 2 & 2 & -2 \\ -2 & 4 - 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2 \phi_{11} - 2 \phi_{21} = 0 \\ -2 \phi_{11} + 2 \phi_{21} = 0 \end{cases}$$

En posant $\phi_{11} = 1$, on aura $\phi_{21} = \frac{2}{2} = 1$

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ii. $\omega_i = \omega_1 = 2,236 \text{ rd/s}$

$$\begin{bmatrix} 6 - \lambda_2 & 2 & -2 \\ -2 & 4 - \lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 6 - 5 & 2 & -2 \\ -2 & 4 - 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -4 \phi_{12} - 2 \phi_{22} = 0 \\ -2 \phi_{12} - 1 \phi_{22} = 0 \end{cases}$$

En posant $\phi_{22} = 1$, on aura $\phi_{12} = \frac{-2}{4} = -0,5$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equation du mouvement

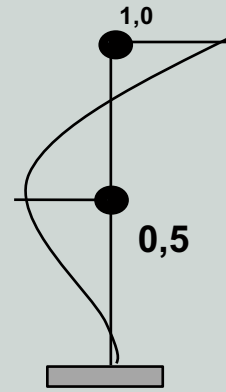
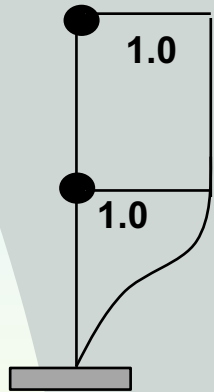
Ainsi

Mode 1

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Mode 2

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Finalement

Matrice spectrale

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1,414 & 0 \\ 0 & 2,236 \end{bmatrix}$$

Matrice Modale

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

Réponse dynamique ?

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}(t)$$

Non amorti ?

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}(t)$$

Avec $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Y}$ alors $\ddot{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{Y}}$

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n \ddot{y}_n + \phi_n^T \mathbf{C} \phi_n \dot{y}_n + \phi_n^T \mathbf{K} \phi_n y_n = \phi_n^T \mathbf{P}(t)$$

Soit

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{y}_n + K_n y_n = P_n$$

Ou bien

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{P_n}{M_n}$$

Avec : $P_n = \phi_n^T p(t)$

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n$$

$$C_n = \phi_n^T \mathbf{C} \phi_n$$

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{K} \phi_n$$

$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

$$\frac{C_n}{M_n} = 2\xi_n \omega_n \quad \text{et} \quad \frac{K_n}{M_n} = \omega_n^2$$

Pour notre cas :

$$M_n \ddot{y}_n + K_n y_n = \phi_n^T P_n$$

Avec

Mode 1

$$M_1 = \{1,0 \quad 1,0\} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{Bmatrix} = 3$$

$$K_1 = \{1,0 \quad 1,0\} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{Bmatrix} = 6 \quad \Rightarrow \quad 3\ddot{y}_1 + 6y_1 = 10$$

$$P_1 = \{1,0 \quad 1,0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = 10$$

Mode 2

$$M_2 = \{-0,5 \quad 1,0\} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 1,0 \end{Bmatrix} = 1,5$$

$$K_2 = \{-0,5 \quad 1,0\} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 1,0 \end{Bmatrix} = 7,5 \quad \Rightarrow \quad 1,5\ddot{y}_2 + 7,5y_2 = 10$$

$$P_2 = \{-0,5 \quad 1,0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = 10$$

S1DDL non amorti soumis à une excitation constante (Chap 3)

$$y_i(t) = y_{ic}(t) + y_{ip}(t)$$

Avec $y_{ic}(t) = A \cos(\omega_{0i}t) + B \sin(\omega_{0i}t) \quad y_{ip}(t) = P_{0i}/k_i$

$$3\ddot{y}_1 + 6y_1 = 10 \quad 1,5\ddot{y}_2 + 7,5y_2 = 10$$

$$y_i(t) = A \cos(\omega_{0i}t) + B \sin(\omega_{0i}t) + P_{0i}/k_i$$

Avec: CI nulles ($u(0) = u_0 = 0 = y_{i0}$ et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = 0 = \dot{y}_{i0}$)

Solution totale sera:

$$y_i(t) = \frac{P_{0i}}{k_i} (1 - \cos(\omega_{0i}t))$$

Mode 1

$$y_1(t) = \frac{10}{6} (1 - \cos(1,414 t))$$

Mode 2

$$y_2(t) = \frac{10}{7,5} (1 - \cos(2,236 t))$$

Or

$$\{U\} = [\Phi] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{10}{6} (1 - \cos(1,414 t)) \\ \frac{10}{7,5} (1 - \cos(2,236 t)) \end{Bmatrix}$$

$$3\ddot{y}_1 + 6y_1 = 10$$

$$1,5\ddot{y}_2 + 7,5y_2 = 10$$

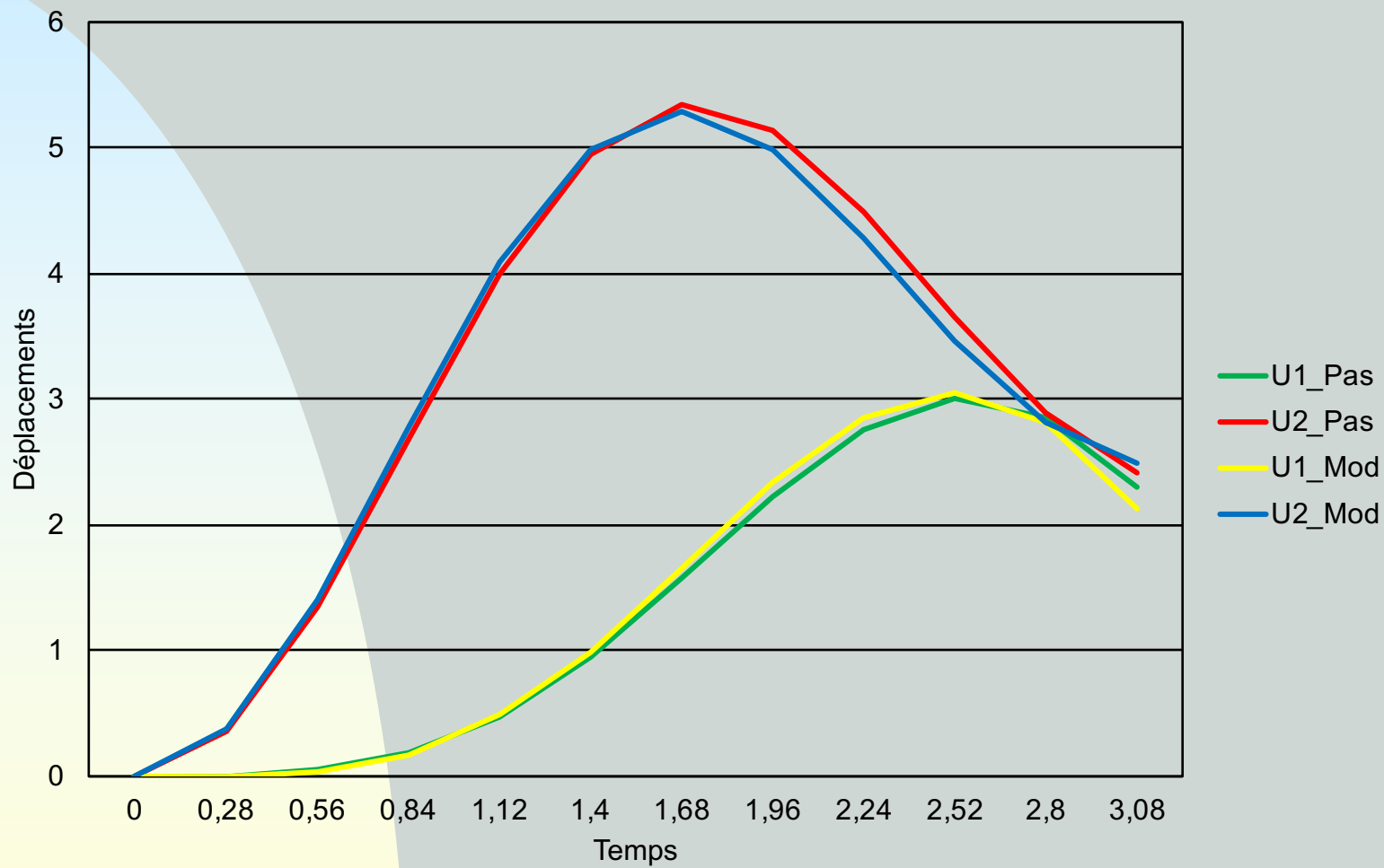
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{10}{6}(1 - \cos(1,414 t)) \\ \frac{10}{7,5}(1 - \cos(2,236 t)) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10}{6}(1 - \cos(1,414 t)) - \frac{5}{7,5}(1 - \cos(2,236 t)) \\ \frac{10}{6}(1 - \cos(1,414 t)) + \frac{10}{7,5}(1 - \cos(2,236 t)) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{10}{6}\cos(1,414 t) + \frac{5}{7,5}\cos(2,236 t) \\ 3 - \frac{10}{6}\cos(1,414 t) - \frac{10}{7,5}\cos(2,236 t) \end{Bmatrix}$$

	t	0	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$
Modale	U_1	0	0,00248	0,03795	0,17535	0,48566	0,99589	1,65651	2,33787	2,86074	3,05201	2,80645	2,13169
	U_2	0	0,38182	1,41141	2,78060	4,09310	4,99577	5,29018	4,98563	4,27686	3,45798	2,80695	2,48520
Wilson- θ	U_1	0	0,00605	0,04946	0,18796	0,48218	0,95761	1,57586	2,22865	2,75937	3,00731	2,86058	2,29945
	U_2	0	0,36626	1,35377	2,68552	3,99820	4,95471	5,34461	5,13953	4,48684	3,64616	2,89296	2,42409

Wilson- θ Vs Analyse Modale



Merci. Fin de l'Application 13